Programme de colles
Semaine 17 du 3/02 au 7/02/2025

Applications linéaires

- Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.
- Notation $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E)$.
- Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations.
- pour $f \in \mathcal{L}(E)$, notation $f^n \quad (n \geqslant 0)$.
- Noyau, lien avec l'injectivité. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.
- Image, lien avec la surjectivité. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.
- En dimension finie :
  * Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.
  * Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.
  * Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
  * Rang d'une application linéaire.
  * Théorème du rang.
  * Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.
  * Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases.
  * Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'isomorphisme réciproque.
  * Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible. Il suffit de disposer d'une matrice inverse à gauche ou à droite.
  * Application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
  * Matrice de passage.
  * Action d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur.
  * Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.
  * Matrices semblables.
- Diagonalisation :
  * Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre d'un endomorphisme.
  * En dimension finie, lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.
  * Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres disctinctes est libre.
  * Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
  * En dimension finie, endomorphisme diagonalisable (matrice diagonalisable).
  * Un endomorphisme en dimension n (une matrice carrée d'ordre n) est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.
  * Un endomorphisme en dimension n (une matrice carrée d'ordre n) ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Les sous-espaces propres sont alors de dimension 1.

Questions de cours :

1. Définitions de l'image et du noyau d'une application linéaire de E vers F.
2. Théorème du rang pour une application linéaire f de E vers F.
3. Caractériser les applications linéaires de E vers F injectives, surjectives, bijectives.
4. Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire en dimension finie.
5. Définition du rang d'une application linéaire de E vers F.
6. Formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme de E de dimension finie.
7. Définition de matrices semblables.

8. Définition de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme.
9. Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
10. Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
11. Définition d'un endomorphisme diagonalisable.
12. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie.
13. Condition suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie.