Exercice 1 : Endomorphisme de $\mathbf{C}^3$

1. $f : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^3$ et les coordonnées de $f(x,y,z)$ sont des combinaisons linéaires de x,y,z, donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3).}$
2. Rang de f
   Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de $\mathbf{C}^3$.
   Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & m \\ m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m^2 \\ 0 & \boxed{2} & 1-m \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & m \\ 0 & 0 & P(m) \\ 0 & \boxed{2} & 1-m \end{pmatrix}$
   avec $P(m) = -m^2 - 2m + 3 = -(m-1)(m+3)$. $P(m) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -3$, donc
   $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3 \text{ si } m \in \mathbf{C} \setminus \{1,-3\} \text{ et } \mathrm{rg}(f) = 2 \Leftrightarrow m \in \{1,-3\}.}$
   f est un automorphisme ssi $m \neq 1$ et $m \neq -3$.
3. Bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$
   $*$ si $m \notin \{1,-3\}$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{C}^3$ car f est injective et surjective.
   $*$ si $m = 1$, on résout $f(x,y,z) = 0$ en partant de la dernière étape de l'échelonnement :
   $$\begin{cases} x - y + z = & 0 \\ 0 = & 0 \\ 2y = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = & -z \\ y = & 0 \\ z = & z \end{cases} \quad \text{donc } \boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(-1,0,1).}$$
   $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $(1,1,1), (-1,-1,1)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(f)$,
   donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,1,1),(-1,-1,1)\big).}$
   $$* \text{ si } m = -3 : (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3z = & 0 \\ 0 = & 0 \\ 2y + 4z = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = & z \\ y = & -2z \\ z = & z \end{cases}$$
   donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1,-2,1).}$
   $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $(1,-3,1), (-1,-1,1)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(f)$,
   donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,-3,1),(-1,-1,1)\big).}$

Exercice 2 : Application linéaire canoniquement associée à une matrice

1. $M \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{R})$ donc l'application linéaire canoniquement associée à M vérifie : $\boxed{u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3).}$
   On peut préciser : $\forall (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ u(x,y,z,t) = \big(x+2y+3z+4t,\ 2x+3y+4z+5t,\ 3x+4y+5z+6t\big)$
   On échelonne M :
   $$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$
   $$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = & 0 \\ y + 2z + 3t = & 0 \\ 0 = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = & z + 2t \\ y = & -2z - 3t \\ z = & z \\ t = & 0 \end{cases}$$
   donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\big((1,-2,1,0),(2,-3,0,1)\big).}$
   $\mathrm{rg}(u) = 2$ et $(1,2,3), (2,3,4)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(u)$,
   donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\big((1,2,3),(2,3,4)\big).}$
2. Bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = M'$
   On cherche $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ base de $\mathbf{R}^4$, et $\mathcal{B}' = (e'_1,e'_2,e'_3)$ base de $\mathbf{R}^3$ telles que : $\begin{cases} u(e_1) = e'_1 \\ u(e_2) = e'_2 \\ u(e_3) = 0 \\ u(e_4) = 0 \end{cases}$
   Il faut donc que : $e_3, e_4 \in \mathrm{Ker}(u)$. On pose : $e_3 = (1,-2,1,0)$ et $e_4 = (2,-3,0,1)$.
   Il faut de plus que $e'_1, e'_2 \in \mathrm{Im}(u)$ et soient non colinéaires, il doivent donc former une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   On pose alors : $e'_1 = (1,2,3) = u(1,0,0,0)$ et $e'_2 = (2,3,4) = u(0,1,0,0)$
   et donc $e_1 = (1,0,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0,0)$.

Il ne reste qu'à compléter (e'_1, e'_2) en une base de $\mathbf{R}^3$.
On pose par exemple $e'_3 = (1,0,0)$ et on vérifie que : $\mathrm{rg}(e'_1, e'_2, e'_3) = 3$. Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ avec } \begin{cases} e_1 = (1,0,0,0) \\ e_2 = (0,1,0,0) \\ e_3 = (1,-2,1,0) \\ e_4 = (2,-3,0,1) \end{cases} \text{ et } \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ avec } \begin{cases} e'_1 = (1,2,3) \\ e'_2 = (2,3,4) \\ e'_3 = (1,0,0) \end{cases} \text{ vérifient : } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = M'.}$$

Rq : on peut aussi vérifier que $\mathrm{rg}(e_1, e_2, e_3, e_4) = 4$ ce qui est immédiat, mais on a par construction que cette famille est libre :
si $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0$, alors en appliquant u et par linéarité : $ae'_1 + be'_2 = 0$
donc $a = b = 0$ car (e'_1, e'_2) est libre. Il reste $ce_3 + de_4 = 0$, donc $c = d = 0$ car (e_3, e_4) est libre.

Exercice 3 : Endomorphisme diagonalisable

1. $\underline{1, 2 \in \mathrm{Sp}(M)}$

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On résout l'équation : $MX = 1 \times X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ 2y = y \\ x - y + 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$

   donc $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } u \text{ et } E_1(u) = \mathrm{Vect}(1,0,-1).}$

   De même : $MX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2x \\ 2y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = z \end{cases}$

   donc $\boxed{2 \text{ est valeur propre de } u \text{ et } E_2(u) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(0,0,1)\big).}$

2. $\dim(E_1(u)) + \dim(E_2(u)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbf{R}^3)$ donc :
   $*$ u ne possède pas d'autre valeur propre : $\mathrm{Sp}(u) = \{1, 2\}$.
   $*$ u est diagonalisable.

Exercice 4 : Endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$

1. $\underline{f_n \in \mathcal{L}\big(\mathbf{R}_n[X]\big)}$

   Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors $f_n(P) = P \circ (X+1) - P$ avec $\deg(P \circ (X+1)) = \deg(P) \times \deg(X+1) = \deg(P)$
   donc $f(P)$ est un polynôme et $\deg(f(P)) \leqslant \deg(P)$. Ainsi, $f_n : \mathbf{R}_n[X] \longrightarrow \mathbf{R}_n[X]$.
   Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
   Alors $f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q) \circ (X+1) - (\lambda P + Q) = \lambda P \circ (X+1) + Q \circ (X+1) - \lambda P - Q$
   $= \lambda(P \circ (X+1) - P) + Q \circ (X+1) - Q = \lambda f(P) + f(Q)$

   Conclusion : $\boxed{f_n \in \mathcal{L}\big(\mathbf{R}_n[X]\big)}$

2. $\underline{\text{Matrice de } f_3 \text{ dans la base canonique de } \mathbf{R}_3[X]}$

   On calcule $f(1) = 1 - 1 = 0$, $\quad f(X) = (X+1) - X = 1$, $\quad f(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$
   et $f(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$.

   Conclusion : $\boxed{M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3. $\underline{\text{Noyau de } f_3}$

   M_3 n'est pas inversible (elle possède une colonne nulle), donc $\boxed{f_3 \text{ n'est pas bijective, donc pas injective.}}$

   $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathrm{Ker}(f_3) \Leftrightarrow M_3 \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b + c + d = 0 \\ 2c + 3d = 0 \\ 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Vect}(1), \text{ où 1 désigne le polynôme constant égal à 1.}}$

4. Diagonalisabilité de f_3
   M_3 est triangulaire, donc on lit ses valeurs propres sur sa diagonale : $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(f_3) = \{0\}$.
   Or, une matrice n'admettant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si c'est la matrice λI_n. En effet, si elle est diagonalisable, alors elle est semblable à λI_n, donc il existe une matrice inversible P telle que : $M = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda(PP^{-1}) = \lambda I_n$.
   Comme M_3 n'est pas la matrice nulle, alors elle n'est pas diagonalisable : $\boxed{f_3 \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Exercice 5 : Matrices d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$

1. Matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$

   D'après l'énoncé : $\boxed{M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

2. Nouvelle base de $\mathbf{R}_2[X]$ Soit $\Pi = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q, R)$

   $$\mathrm{rg}(\Pi) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{-2} \end{pmatrix} = 3$$

   Π est inversible, donc $\boxed{\mathcal{B}' = (P, Q, R) \text{ est une base de } \mathbf{R}_2[X].}$

3. Matrice relativement à la base $\mathcal{B}'$
   On détermine Π^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

   Donc : $\Pi^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On calcule alors : $\boxed{M' = \Pi^{-1} M \Pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$

   Alternativement :
   $\varphi(P) = \varphi(-X + 1) = -\varphi(X) + \varphi(1) = -(-2X^2 + 1) + (-2X^2 - 2X + 3) = -2X + 2 = 2P$
   donc la première colonne de M' est $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et on fait de même pour $\varphi(Q)$ et $\varphi(R)$.

4. Image par φ d'un polynôme
   Soit $S = 1 + X - X^2 \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(S) = X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(S)) = MX = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$
   donc $\boxed{\varphi(S) = 4 - 5X^2.}$
   De plus, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(S) = X' = \Pi^{-1}X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ donc $Y' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi(S)) = M'X' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$
   donc $\boxed{\varphi(S) = -\dfrac{1}{2}P - \dfrac{1}{2}Q + \dfrac{9}{2}R.}$

Exercice 6 : Polynômes de Lagrange

1. $f \in \mathcal{L}\big(\mathbf{R}_{n-1}[X], \mathbf{R}^n\big)$
   Soient $P, Q \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :
$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \big((\lambda P + Q)(a_1), \ldots, (\lambda P + Q)(a_n)\big) \\ &= \big(\lambda P(a_1) + Q(a_1), \ldots, \lambda P(a_n) + Q(a_n)\big) \\ &= \lambda\big(P(a_1), \ldots, P(a_n)\big) + \big(Q(a_1), \ldots, Q(a_n)\big) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

   donc $\boxed{f \in \mathcal{L}\big(\mathbf{R}_{n-1}[X], \mathbf{R}^n\big).}$

2. <u>f est un isomorphisme</u>
Étude de $\mathrm{Ker}(f)$: $P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ P(a_i) = 0$.
Cela implique que le polynôme P admet au moins n racines distinctes.
Or, $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ donc $\deg(P) \leqslant n-1$, donc $P = 0$.
Conclusion : $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et $\boxed{f \text{ est injective.}}$ Puisque $\dim(\mathbf{R}_{n-1}[X]) = n = \dim(\mathbf{R}^n)$,
il y a équivalence entre injectif, surjectif et bijectif : $\boxed{f \text{ est bijective.}}$

3. <u>Expression de f^{-1}</u>
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors $f^{-1}(e_i)$ est l'unique polynôme P de degré $\leqslant n-1$ tel que $f(P) = e_i$ c'est-à-dire tel que : $P(a_j) = 0$ si $j \neq i$, et $P(a_i) = 1$.
Tous les $a_j (j \neq i)$ sont racines de P, donc $P = Q \displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)$ où $Q \in \mathbf{R}[X]$.
Mais $\deg\left(\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)\right) = n-1$ donc $\deg(Q) = 0$: Q est une constante non nulle λ.
Enfin, $P(a_i) = 1$ donc $\lambda \displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j) = 1$, soit : $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$

Conclusion : $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ f^{-1}(e_i) = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}}$

Exercice 7 : Matrices semblables

1. <u>Une nouvelle base</u>
On cherche une base $\mathcal{B}' = (P, Q, R)$ de $\mathbf{R}_2[X]$ telle que : $\begin{cases} f(P) = 0 \\ f(Q) = P \\ f(R) = Q \end{cases}$
$f(P) = 0$ signifie que P est dans le noyau de f, ou encore (si $P \neq 0$) que P est vecteur propre de f, associé à la valeur propre 0. On remarque que la somme de chaque ligne de A est nulle, donc $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, donc $P = 1 + X + X^2$ vérifie : $f(P) = 0$.
Soit $Q = a + bX + cX^2 \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors $f(Q) = P \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 1 \\ -a - 2b + 3c = 1 \\ -b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = c - 1 \\ c = c \end{cases}$
On pose $c = 0$: $Q = 1 - X$ vérifie $f(Q) = P$.
Soit $R = a' + b'X + c'X^2 \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors $f(R) = Q \Leftrightarrow \begin{cases} a' - c' = 1 \\ -a' - 2b' + 3c' = -1 \\ -b' + c' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = c' + 1 \\ b' = c' \\ c' = c' \end{cases}$
On pose $c' = 0$: $R = 1$ vérifie $f(R) = Q$.
(on peut aussi reconnaître la première colonne de A)
$\boxed{\mathcal{B}' = \left(1 + X + X^2,\ 1 - X,\ 1\right) \text{ est une base de } \mathbf{R}_2[X] \text{ telle que : } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = B.}$
On a alors $\boxed{P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et (après calculs) } P^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$
$\boxed{B = P^{-1}AP : A \text{ et } B \text{ sont semblables, elles représentent le même endomorphisme } f \text{ dans des bases différentes.}}$

2. <u>$(f + 2\mathrm{Id})^n$</u>
Dans la base $\mathcal{B}'$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f + 2\mathrm{Id}) = B + 2I_3$ donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big((f + 2\mathrm{Id})^n\big) = (B + 2I_3)^n$.
$2I_3$ et B commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton :
$\forall n \geqslant 0,\ (B + 2I_3)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k}$ avec $B^2 = E_{1,3}$ (matrice élémentaire) et $\forall k \geqslant 3,\ B^k = 0_3$

Si $n \geqslant 2$, on ne conserve dans la somme que les termes d'indices $k = 0, 1$ ou 2 :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2,\ (B+2I_3)^n &= \binom{n}{0}B^0(2I_3)^n + \binom{n}{1}B^1(2I_3)^{n-1} + \binom{n}{2}B^2(2I_3)^{n-2}\\ &= 2^n I_3 + n2^{n-1}B + n(n-1)2^{n-3}B^2\\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3}\\ 0 & 2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Rq : cette formule est encore valable pour $n = 0$ ou 1. Pour $n = -1$, elle donne l'inverse de $B + 2I_3$.

Exercice 8 : Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

1. $\varphi : M \longmapsto MA - AM$ est linéaire
   $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}),\ MA - AM \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ donc $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
   Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda M + N) &= (\lambda M + N)A - A(\lambda M + N)\\ &= \lambda(MA - AM) + (NA - AN)\\ &= \lambda\varphi(M) + \varphi(N)\end{aligned}$$
   donc $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_2(\mathbf{R})\big).}$
2. Matrice de φ dans la base canonique
   On calcule $\varphi(E_{1,1}) = \varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix} = 3E_{1,2}$
   et de même : $\varphi(E_{1,2}) = 0_2,\quad \varphi(E_{2,1}) = -3I_2 = -3E_{1,1} - 3E_{2,2}$ et $\varphi(E_{2,2}) = -3E_{1,2}$
   Conclusion : $\boxed{M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix}0&0&-3&0\\3&0&0&-3\\0&0&0&0\\0&0&-3&0\end{pmatrix}}$
3. Image et noyau de φ
   $\boxed{\varphi \text{ n'est ni injectif, ni surjectif}}$ car M possède une ligne nulle.
   On résout $MX = 0$ avec $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ pour trouver $\mathrm{Ker}(\varphi)$: on pose $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$
   et $MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-3z = 0\\ 3x - 3t = 0\\ 0 = 0\\ -3z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = t\\ y = y\\ z = 0\\ t = t\end{cases}$ donc $X = \begin{pmatrix}t\\y\\0\\t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(I_2, E_{1,2}).}$
   D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim\big(\mathcal{M}_2(\mathbf{R})\big) - \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 4 - 2 = 2$.
   De plus, $3E_{1,2}$ et $-3E_{1,1} - 3E_{2,2}$ appartiennent à $\mathrm{Im}(\varphi)$ et sont non colinéaires
   donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{1,1} + E_{2,2}) = \mathrm{Vect}(E_{1,2}, I_2).}$
4. $\varphi^2 = 0$
   Vu ce qui précède : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$. En conséquence :
   $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}),\ \varphi^2(M) = \varphi\big(\varphi(M)\big) = \varphi(N)$ avec $N = \varphi(M) \in \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$
   donc $\varphi(N) = 0_2$, et $\varphi^2(M) = 0_2$. Conclusion : $\boxed{\varphi^2 = 0.}$
   Alternativement : on calcule M^2, et on trouve 0_4.

Exercice 9 : Endomorphisme de l'ensemble E des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}_+^\star$

1. φ endomorphisme de E
   Soit $P \in E$: $\exists (a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5 \mid \forall x > 0,\ P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.

Alors : $\forall x>0,\ \varphi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\begin{aligned}
&= a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+2x^4\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x^3}+\frac{e}{x^4}\right)\\
&= (a+2e)+(b+2d)x+3cx^2+(d+2b)x^3+(e+2a)x^4\\
&= a'+b'x+c'x^2+d'x^3+e'x^4
\end{aligned}$$

donc $\varphi(P)\in E$.

Soient $P,Q\in E$ et soit $\lambda\in\mathbf{R}$. Pour tout $x>0$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P+Q)(x) &= (\lambda P+Q)(x)+2x^4(\lambda P+Q)\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \lambda\left(P(x)+2x^4P\left(\frac{1}{x}\right)\right)+Q(x)+2x^4Q\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \lambda\varphi(P)(x)+\varphi(Q)(x)
\end{aligned}$$

donc : $\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$. En conclusion : $\boxed{\varphi\in\mathcal{L}(E).}$

2. Relation entre φ^2,φ et Id_E

Soit $P\in E$. Pour tout $x>0$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi^2(P)(x) &= \varphi(P)(x)+2x^4\varphi(P)\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= P(x)+2x^4P\left(\frac{1}{x}\right)+2x^4\left(P\left(\frac{1}{x}\right)+2\left(\frac{1}{x}\right)^4P\left(\frac{1}{1/x}\right)\right)\\
&= 5P(x)+4x^4P\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= 3P(x)+2\varphi(P)(x)
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\varphi^2=2\varphi+3\mathrm{Id}_E.}$

Soit $P\in E$ non nul, soit $\lambda\in\mathbf{R}$ tels que : $\varphi(P)=\lambda P$. Alors $\varphi^2(P)=\varphi(\lambda P)=\lambda\varphi(P)=\lambda^2P$ et par ailleurs, $\varphi^2(P)=2\varphi(P)+3P=(2\lambda+3)P$. On a donc $\lambda^2P=(2\lambda+3)P$ avec $P\neq 0$ donc $\lambda^2=2\lambda+3$. On en déduit que $\lambda=-1$ ou 3 : $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi)\subset\{-1,3\}.}$

$0\notin\mathrm{Sp}(\varphi)$ donc φ est injective. En tant qu'endomorphisme en dimension finie, $\boxed{\varphi \text{ est bijective.}}$

Enfin, $\varphi^2-2\varphi=3\mathrm{Id}_E$ donc $\varphi\circ\left(\frac{1}{3}\varphi-\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E\right)=\mathrm{Id}_E$, ce qui prouve que $\boxed{\varphi^{-1}=\frac{1}{3}\varphi-\frac{2}{3}\mathrm{Id}_E.}$

Explicitement : $\forall P\in E,\forall x>0,\ \varphi^{-1}(P)(x)=-\frac{1}{3}P(x)+\frac{2}{3}x^4P\left(\frac{1}{x}\right)$

3. φ est diagonalisable

$*$ Étude de $\mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{Id}_E)$:

Rq : on cherche à savoir si ce s-ev est nul ou pas. S'il n'est pas nul, alors -1 est valeur propre de φ.

$P=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4\in\mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{Id}_E)\Leftrightarrow(\varphi+\mathrm{Id}_E)(P)=0\Leftrightarrow\forall x>0,\ (\varphi+\mathrm{Id}_E)(P)(x)=0$

$\Leftrightarrow\forall x>0,\ 2P(x)+2x^4P\left(\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow\forall x>0,\ (a+e)+(b+d)x+2cx^2+(d+b)x^3+(e+a)x^4=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+e= & 0\\ b+d= & 0\\ 2c= & 0\end{cases}\Leftrightarrow P=a+bX-bX^3-aX^4=a(1-X^4)+b(X-X^3)$$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(1-X^4,\ X-X^3)\neq\{0\}\text{ et }-1\in\mathrm{Sp}(\varphi).}$

$*$ Étude de $\mathrm{Ker}(\varphi-3\mathrm{Id}_E)$:

$P=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4\in\mathrm{Ker}(\varphi-3\mathrm{Id}_E)\Leftrightarrow(\varphi-3\mathrm{Id}_E)(P)=0\Leftrightarrow\forall x>0,\ (\varphi-3\mathrm{Id}_E)(P)(x)=0$

$\Leftrightarrow\forall x>0,\ -2P(x)+2x^4P\left(\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow\forall x>0,\ (-a+e)+(-b+d)x+(-d+b)x^3+(-e+a)x^4=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-a+e= & 0\\ -b+d= & 0\end{cases}\Leftrightarrow P=a+bX+cX^2+bX^3+aX^4=a(1+X^4)+b(X+X^3)+cX^2$$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(1 + X^4,\ X + X^3,\ X^2) \neq \{0\} \text{ et } 3 \in \mathrm{Sp}(\varphi).}$

Enfin, $\dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_E)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_E)\big) = 2 + 3 = 5 = \dim(E)$

donc φ ne possède pas d'autre valeur propre : $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-1, 3\} \text{ et } \varphi \text{ est diagonalisable.}}$

Alternativement :
on calcule : $\varphi(1) = 1+2X^4,\ \varphi(X) = X+2X^3,\ \varphi(X^2) = 3X^2,\ \varphi(X^3) = 2X+X^3$ et $\varphi(X^4) = 2+X^4$.

Dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$, on a : $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_5 + 2J_5$

en notant J_5 la matrice anti-diagonale, vérifiant $(J_5)^2 = I_5$.
On observe alors que M est symétrique réelle, donc diagonalisable.
On peut calculer simplement : $M^2 = (I_5 + 2J_5)^2 = 5I_5 + 4J_5 = 2M + 3I_5$
et l'étude de $\mathrm{Ker}(M + I_5)$ et $\mathrm{Ker}(M - 3I_5)$ est assez simple.