Programme de colles
Semaine 18 du 3/03 au 7/03/2025

Semaine du 24 février : **Concours blanc**, pas de colle

Applications linéaires

- Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.
- Notation $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E)$.
- Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations.
- pour $f \in \mathcal{L}(E)$, notation $f^n \quad (n \geqslant 0)$.
- Noyau, lien avec l'injectivité. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.
- Image, lien avec la surjectivité. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.
- En dimension finie :
  - ∗ Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.
  - ∗ Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.
  - ∗ Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
  - ∗ Rang d'une application linéaire.
  - ∗ Théorème du rang.
  - ∗ Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.
  - ∗ Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases.
  - ∗ Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'isomorphisme réciproque.
  - ∗ Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible. Il suffit de disposer d'une matrice inverse à gauche ou à droite.
  - ∗ Application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
  - ∗ Matrice de passage.
  - ∗ Action d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur.
  - ∗ Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.
  - ∗ Matrices semblables.
- Diagonalisation :
  - ∗ Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre d'un endomorphisme.
  - ∗ En dimension finie, lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.
  - ∗ Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres disctinctes est libre.
  - ∗ Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
  - ∗ En dimension finie, endomorphisme diagonalisable (matrice diagonalisable).
  - ∗ Un endomorphisme en dimension n (une matrice carrée d'ordre n) est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.
  - ∗ Un endomorphisme en dimension n (une matrice carrée d'ordre n) ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Les sous-espaces propres sont alors de dimension 1.

Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$

- Vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
- Colinéarité.
- Déterminant de deux vecteurs dans le plan, condition de colinéarité.
- Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$.
- Écriture matricielle du produit scalaire.
- Bilinéarité, symétrie, positivité, définition.

- Norme euclidienne.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Inégalité triangulaire.
- Vecteurs orthogonaux.
- Toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux ne contenant pas le vecteur nul est libre.
- Théorème de Pythagore.
- Base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
- Toute matrice carrée symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et, pour une telle base, la matrice de passage vérifie : $P^{-1} = P^T$.
- Distance entre deux vecteurs.
- Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide de $\mathbf{R}^n$.
- Orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^n$.
- $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$
- Pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $\exists!\,(u_F, u_{F^\perp}) \ \mid \ u = u_F + u_{F^\perp}$
- Projection orthogonale p sur un sous-espace vectoriel F. $\quad p : u \mapsto u_F$
- Écriture de la projection orthogonale p dans une base orthogonale ou orthonormale de F.
- Propriétes : $p \circ p = p$, $\mathrm{Ker}(p) = F^\perp$ et $\mathrm{Im}(p) = F$.
- Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Questions de cours :

1. Définitions de l'image et du noyau d'une application linéaire de E vers F.
2. Théorème du rang pour une application linéaire f de E vers F.
3. Caractériser les applications linéaires de E vers F injectives, surjectives, bijectives.
4. Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire en dimension finie.
5. Définition du rang d'une application linéaire de E vers F.
6. Formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme de E de dimension finie.
7. Définition de matrices semblables.
8. Définition de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme.
9. Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
10. Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
11. Définition d'un endomorphisme diagonalisable.
12. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie.
13. Condition suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie.
14. Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$.
15. Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
16. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
17. Énoncer l'inégalité triangulaire.
18. Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbf{R}^n$.
19. Définition d'une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$.
20. Expression de la projection orthogonale sur F dans une base orthonormale de F.
21. Définition de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
22. Lien entre distance et projection orthogonale.