

A. Polynômes de Hermite

1. D'après (1), par calcul : $H_2 = 2XH_1 - 2H_0 = 4X^2 - 2$, et $H_3 = 2XH_2 - 4H_1 = 8X^3 - 12$.

2. a) La propriété (p_n) à prouver est vraie aux rangs 0 et 1 en posant $K_0 = K_1 = 0$. Si on suppose la propriété (p_n) vraie à deux rangs consécutifs n et $n + 1$, prouvons qu'elle l'est au rang $n + 2$: on réinjecte les hypothèses (p_n) et (p_{n+1}) dans (1), ce qui donne après avoir réordonné :

$$H_{n+2} = 2^{n+2}X^{n+2} + \underbrace{2XK^{n+1}}_{\text{de degré } < n+2} - \underbrace{2^{n+1}(n+1)X^n}_{\text{de degré } n} - \underbrace{2(n+1)K_n}_{\text{de degré } < n}.$$

D'après le calcul ci-dessus, en posant $K_{n+2} = 2XK^{n+1} - 2^{n+1}(n+1)X^n - 2(n+1)K_n$, K_{n+2} est combinaison linéaire d'éléments de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_{n+1}[X]$, ce qui prouve (p_{n+2}) et achève la récurrence.

b) Il est visible que H_0 est une fonction paire et que H_1 est impaire. Si la propriété à prouver est supposée vraie aux rangs consécutifs n et $n + 1$ pour un entier n donné, en substituant alors X par $-X$ dans la relation (1), on obtient, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$H_{n+2}(-X) = (-2X)H_{n+1}(-X) - 2(n+1)H_{n+1}(-X) = -2(-1)^{n+1}XH_{n+1}(X) - 2(-1)^n(n+1)H_n(X).$$

Comme $(-1)^{n+2} = (-1)^n$, on peut factoriser la dernière égalité par $(-1)^{n+2}$, ce qui donne :

$$H_{n+2}(-X) = (-1)^{n+2} \left(2XH_{n+1}(X) - 2(n+1)H_n(X) \right),$$

et le terme entre parenthèse n'est rien d'autre que H_{n+2} d'après la relation de récurrence (1).

c) Établissons simplement l'hérédité : comme (1) est une égalité de fonctions, on peut dériver, ce qui donne :

$$H'_{n+2} = 2H_{n+1} + 2XH'_{n+1} - 2(n+1)H'_n.$$

Par hypothèse de récurrence, $H'_{n+1} = 2(n+1)H_n$ et $H'_n = 2nH_{n-1}$, ce qui donne :

$$H'_{n+2} = 2H_{n+1} + 2X2(n+1)H_n - 2(n+1)2nH_{n-1}.$$

Or par (1) encore : $H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}$, donc en factorisant dans l'expression de H'_{n+2} , il vient :

$$H'_{n+2} = 2H_{n+1} + 2(n+1) \left(2XH_n - 2nH_{n-1} \right) = 2H_{n+1} + 2(n+1)H_{n+1} = 2(n+2)H_{n+2}.$$

3. D'après 2. a), \mathcal{H}_n est une famille de polynômes non nuls à degré 2 à 2 distincts, elle est libre d'après le cours. Comme elle contient $n + 1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$ vecteurs, c'en est bien une base.

4. a) la boucle sert à calculer $H_n(x)$ pour $n \geq 2$. Ainsi, à partir de $n = 2$, exactement $n + 1$ tours de boucles sont requis. Ensuite, on calcule h_2 qui est la valeur courante de H_k dans le tour de boucle k . Enfin, par affectation à la volée, on fait jouer au prochain tour de boucle $k + 1$ à h_2 et h_1 respectivement, les rôles de h_0 et h_1 du tour de boucle k :

```
for k in range(2, n+1):
    h2 = 2*x*h1 - 2*(k-1)*h0
    h1, h0 = h2, h1
```

b) Comme H_3 est une fonction impaire d'après 2. b) il est nécessaire que $r = 3$. Comme un polynôme de degré 4 ne peut avoir 6 racines distinctes, on ne peut avoir $p = 6$, donc $p = 4$, et finalement $q = 6$.

B. Endomorphisme sur l'espace vectoriel des fonctions de Hermite-Gauss

1. Les polynômes et la fonction ψ_0 sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} , donc par produit, tout élément de \mathcal{E} est bien dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Soit ensuite f_1, f_2 deux fonctions de \mathcal{E} , mettons $f_1 = P_1\psi_0, f_2 = P_2\psi_0$ où P_1, P_2 sont des polynômes de $\mathbf{R}[X]$. Soit λ un scalaire, et montrons que $f = f_1 + \lambda f_2$ est dans \mathcal{E} . Par simple calcul : $f_1 + \lambda f_2 = (P_1 + \lambda P_2)\psi_0$ est bien dans \mathcal{E} , puisque $\mathbf{R}[X]$ est un espace vectoriel. Ainsi \mathcal{E} est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.
2. Supposons qu'une combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B}_n soit nulle pour des réels $a_0 \dots a_n$:

$$a_0\psi_0 + \dots + a_n\psi_n = 0.$$

Montrons la nullité des a_i . Par définition des ψ_k , et comme la fonction ψ_0 ne s'annule jamais, l'égalité ci-dessus devient après division par ψ_0 :

$$a_0H_0 + \dots + a_nH_n = 0.$$

Or la famille \mathcal{H}_n est libre d'après **A. 3.**, donc tous les a_i sont nuls, et \mathcal{B}_n est libre. En tant que famille génératrice de \mathcal{E}_n , et libre par ce qui précède, \mathcal{B}_n est une base de \mathcal{E}_n . Comme elle contient $n + 1$ vecteurs, la dimension de \mathcal{E}_n est $n + 1$.

3.
 - a) Soit $n \geq 0$. Il suffit de multiplier la relation (1) par ψ_0 , et d'y décrétement n ce qui donne exactement la relation demandée, qui devient alors valable seulement à partir du rang $n = 1$, comme attendu.
 - b) Par règles de calcul sur la dérivation : pour tout réel x , $\psi'_0(x) = -xe^{-x^2/2} = -x\psi_0(x)$. En termes de vecteurs : $\psi'_0 = -X\psi_0$.
 - c) Soit $n \geq 1$. Soit x un réel. Partant de la définition de ψ_n , on a :

$$\psi'_n(x) = H'_n(x)\psi_0(x) + H_n(x)\psi'_0(x)$$

par règle de dérivation. En utilisant **A2.c)** et **3.b)** pour transformer chacun des deux termes apparaissant dans l'expression de $\psi'_n(x)$:

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \psi'_n(x) = 2n \underbrace{H_{n-1}(x)\psi_0(x)}_{\psi_{n-1}(x)} - x \underbrace{H_n(x)\psi_0(x)}_{\psi_n(x)}.$$

Réécrivant cette dernière égalité en termes de fonctions, cela donne le résultat.

4.
 - a) Soit $n \geq 1$: en ajoutant membre à membre $X\psi_n$ dans le résultat de **3.c)**, on a bien $T^+(\psi_n) = 2n\psi_{n-1}$.
 - b) Soit $n \geq 1$. En retranchant cette fois membre à membre $X\psi_n$ dans le résultat de **3.c)** on obtient :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \psi'_n(x) - x\psi_n(x) = 2n\psi_{n-1}(x) - 2x\psi_{n-1}(x).$$

En revenant à la définition des ψ_k et utilisant **3.a)**, on reconnaît $-\psi_{n+1}(x)$ dans le membre de droite. En termes de fonctions, l'égalité ci-dessus devient alors : $-T^-(\psi_n) = -\psi_{n+1}$.

5. a) L'application $f \mapsto Xf$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ est clairement linéaire par distributivité du produit, tout comme la dérivation. Donc, en tant que somme d'applications linéaires, T^+ est linéaire. Il reste à voir que si f est dans \mathcal{E}_n , $T^+(f)$ aussi. Soit $f \in \mathcal{E}_n$. Comme \mathcal{B}_n est une base de \mathcal{E}_n , on peut décomposer f en $f = a_0\psi_0 + \dots + a_n\psi_n$, où les scalaires a_k sont les coordonnées de f sur la base \mathcal{B}_n . Par linéarité de T^+ :

$$T^+(f) = a_0T^+(\psi_0) + \dots + a_nT^+(\psi_n).$$

Mais d'après et la relation 3. b), $T^+(\psi_0) = 0$, et par 4. a), on déduit finalement que $T^+(f)$ est combinaison linéaire $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$. En particulier, $f \in \mathcal{E}_n$, et T^+ est linéaire.

- b) On a vu que $T^+(\psi_0) = 0$ par 3. b) et $T^+(\psi_k) = 2k\psi_{k-1}$ par 4. a) pour $k \geq 1$. Ce qui donne la matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ suivante, qui est triangulaire supérieure :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 4 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6. a) Travaillons en coordonnées. Commençons par chercher l'image de T_2^+ . La matrice A_2 est échelonnée, donc son rang est visiblement 2. Deux colonnes libres fournissent donc une base de l'image de A_2 . Or les colonnes 2 et 3 de A_2 le sont manifestement. Finalement, *revenant aux vecteurs*, $(2\psi_1, 4\psi_2)$ est une base de $\text{Im } T_2^+$, qu'on peut remplacer par la base (ψ_1, ψ_2) . Quant au noyau : d'après le théorème du rang, le noyau de A_2 est de dimension 1, donc tout vecteur non nul du noyau en constitue une base. Or la colonne 1 de A_2 , est nulle, donc en *revenant aux vecteurs*, $\psi_0 \in \text{Ker } T_2^+$, et (ψ_0) constitue une base de $\text{Ker } T_2^+$.
- b) Le spectre de T_2^+ est celui de A_2 d'après le cours. Comme A_2 est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Visiblement $\text{spec}(T_2^+) = \{0\}$. L'endomorphisme de T_2^+ de \mathcal{E}_2 est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est $3 = \dim \mathcal{E}_2$. Or, $\text{spec}(T_2^+) = \{0\}$, le seul sous-espace propre de T_2^+ est son noyau. Comme le noyau est de dimension $1 < 3$, T_2^+ n'est pas diagonalisable.

C. Orthogonalité de la famille des fonctions $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$

1. a) D'après le cours $\mu_0 = 0$ et $\mu_1 = 1$ (pour toute variable aléatoire d'espérance nulle, la variance est égale au moment d'ordre 2).
- b) Dans l'intégrale généralisée μ_k , on pose $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$, qui définit bien un changement de variables bijectif de classe \mathcal{C}^1 de $\mathbf{R} \ni t$ dans $\mathbf{R} \ni x$. D'après le cours, ce changement de variables ne change pas la valeur de l'intégrale généralisée dont on sait qu'elle est convergente ici d'après l'énoncé. Cela donne $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2})^k x^k e^{-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} dx$. D'où le résultat.

2. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme ($n \in \mathbf{N}$). Chacune des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx$ converge d'après la question précédente. Donc en tant que combinaison linéaire d'intégrales convergentes, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx$ converge également.

3. a) Comme $H_0 = 1$, $J_{0,0} = \sqrt{\pi} \mu'_0$ par définition. Par **1. a)** et **b)**, $J_{0,0} = \sqrt{\pi}$.

b) Soit $n \geq 2$. En dérivant, et utilisant le fait que $H'_{n-1} = 2(n-1)H_{n-2}$, (valide car $n \geq 2$), il vient, pour tout réel x :

$$\frac{d}{dx} \left(H_{n-1}(x)e^{-x^2} \right) = -2xe^{-x^2} H_{n-1}(x) + H'_{n-1}(x)e^{-x^2} = -e^{-x^2} (2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x))$$

On reconnaît dans le terme entre parenthèses la fonction H_n . Traitons le cas $n = 1$: on utilise simplement le fait que la dérivée de $x \mapsto e^{-x^2}$ est $x \mapsto -2xe^{-x^2}$, ainsi que les valeurs de $H_0 = 1$, $H_1 = 2X$: la formule est encore vraie pour $n = 1$.

c) Soit $m \geq 1$ et $n \geq 1$. D'après la question précédente et par intégration par parties (les fonctions en jeu sont dans \mathcal{C}^∞) :

$$J_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \left(\frac{d}{dx} \left(-H_{n-1}(x)e^{-x^2} \right) \right) dx = \left[-H_m(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} dx.$$

Cette intégration par parties est valable car dans l'égalité, les deux termes intégraux sont convergents d'après la question 2.. Le terme entre crochets est nul par un argument de croissance comparées entre polynômes et exponentielles. Comme $m \geq 1$, on peut utiliser que $H'_m = 2mH_{m-1}$, et finalement $J_{m,n} = 0 + 2mJ_{m-1,n-1}$, ce qui donne le résultat.

4. a) Soit $m \geq 1$ et $n \geq 1$. Les entiers m, n jouent le même rôle dans $J_{m,n}$ puisque $J_{m,n} = J_{n,m}$. On a donc : $2mJ_{m-1,n-1} = 2nJ_{m-1,n-1}$. Par soustraction : $2(m-n)J_{m,n} = 0$. Si $m \neq n$, on a bien $J_{m,n} = 0$.

b) Récurrence facile laissée au lecteur, puisqu'on connaît $J_{0,0} = \sqrt{\pi}$ par **3. a)**, et $J_{n,n} = 2nJ_{n-1,n-1}$.

D. Quantification des énergies vibratoires. Règle de transition

1. Soit y une solution de (S). Par composition, la fonction ψ est deux fois dérivable sur \mathbf{R} puisque y l'est, et on obtient : $\forall t \in \mathbf{R} \quad \psi'(t) = x_0 y'(tx_0)$, puis en redérivant : $\forall t \in \mathbf{R} \quad \psi''(t) = x_0^2 y''(tx_0)$. Ensuite, d'après (S), on a donc, en utilisant que $x = tx_0$:

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{x_0^2}{x_0^2} y''(tx_0) + \frac{1}{2} kx_0^2 t^2 y(tx_0) = E \times y(tx_0).$$

En utilisant les constantes introduites dans l'énoncé, et l'expression de $\psi''(t)$ calculée préalablement, on peut réécrire la dernière égalité après division par $\frac{\hbar^2}{2mx_0^2}$:

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad -\psi''(t) + \frac{m^2 x_0^2 \omega_0^2 x_0^2}{\hbar^2} t^2 \psi(t) = \frac{2mx_0^2}{\hbar^2} E \psi(t).$$

Enfin, on simplifie en utilisant le fait que par définition de $x_0 : m^2 \omega_0^2 x_0^4 = \hbar^2$, et que $m x_0^2 = \frac{\hbar}{\omega_0}$, ce qui donne bien l'équation (V_λ) avec $\lambda = \frac{2E}{\hbar \omega_0}$.

2. Soit ψ une solution non nulle de (V_λ)

- a) Soit $t \in \mathbf{R}$. Par définition de $T : T(\psi)(t) = -\psi''(t) + t^2\psi(t) = \lambda\psi(t)$, et la dernière égalité parce que ψ vérifie (V_λ) .
- b) En termes de fonctions, le calcul précédent nous dit : $T(\psi) = \lambda\psi$. Une solution non nulle de (V_λ) est donc un vecteur propre de l'endomorphisme T .

3. a) Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors par règles de calcul sur la dérivation :

$$T^+(T^-(f)) = T^+(Xf - f') = X(Xf - f') + (Xf - f')' = X^2f' - Xf' + Xf' + f - f'' = T(f) + f.$$

- b) Soit n un entier, le calcul précédent est valable en l'appliquant à $f = \psi_n$, ce qui donne d'une part : $T^+(T^-(\psi_n)) = T(\psi_n) + \psi_n$. Mais en calculant d'autre part à partir des résultats de **B4.** : $T^+(T^-(\psi_n)) = T^+(\psi_{n+1}) = 2(n+1)\psi_n$, la dernière égalité étant valable car $n+1 \geq 1$. Finalement, en égalisant les deux expressions obtenues de $T^+(T^-(\psi_n))$, on trouve que $T(\psi_n) + \psi_n = 2(n+1)\psi_n$, c'est-à-dire, après soustraction membre à membre de ψ_n , que ψ_n est vecteur propre de T pour la valeur propre $\lambda_n = 2n+1$.

- c) D'après **1.**, λ_n et E_n sont reliés par $E_n = \frac{1}{2}\lambda_n\hbar\omega_0$ dans le cas où E_n est une valeur possible de l'énergie de vibration puisque λ_n est une valeur propre de T . Comme $\lambda = 2n+1$, on a le résultat.

4. Soit k, k' deux entiers au moins égaux à 1. On peut noter que l'intégrale $p_{k,k'}$ converge d'après **C.2.** . D'après la relation (1) encore, pour tout réel $x : 2xH_k(x) = H_{k+1}(x) + 2kH_{k-1}(x)$. En multipliant cette relation par $H_{k'}(x)$ et en intégrant, on obtient, puisque tous les termes en jeu convergent d'après **C.2.** : $p_{k,k'} = J_{k',k+1} + 2kJ_{k',k-1}$. Avec le résultat de la question **C 4. a)**, on déduit que si k' vaut un entier autre que $k \pm 1$, les deux termes de la somme dans la dernière expression de $p_{k,k'}$ sont nuls. Donc une transition d'énergie du niveau k au niveau k' autre que $k \pm 1$ est quasi-impossible : on établit ainsi la règle de sélection.

E. Position moyenne du centre de masse. Étalement de la fonction d'onde.

1. Soit $n \geq 0$. La fonction φ_n est de produit de fonctions de \mathcal{E}_n , donc elle est définie et continue sur \mathbf{R} , et clairement positive. Son intégrale sur \mathbf{R} converge d'après **C2.**, et vaut $c_n \times J_{n,n} = 1$ par **C4. b)**. La fonction φ_n est bien une densité de probabilité.

2. a) D'après **C.3. c)**, $J_{(k+1),(k+1)} = 2(k+1)J_{k,k}$. Comme $c_k = 1/J_{k,k}$, on déduit que $c_{k+1}/c_k = \frac{1}{2(k+1)}$.

b) On utilise la question précédente et on veille au bon nombre de tours de boucle. Enfin, on utilise la définition de φ_n pour compléter la ligne 9 :

```
1 | import numpy as np
2 | def c(n):
```

```

3 | u = 1/ np.sqrt(np.pi)
4 | for k in range(n):
5 |     u=u*1/(2*(k+1))
6 | return u
7 |
8 | def phi(n,x):
9 |     return c(n)*(H(n,x)**2)*np.exp(-x**2)

```

3. Comme les fonctions φ_n sont paires, les intégrandes donnant l'expression de $E(X_n)$ sont des fonctions impaires. Ainsi $E(X_n) = 0$: en moyenne (c'est-à-dire sur un grand nombre d'observations), d'après la signification des oscillations donnée en préambule du sujet, les oscillations mesurées du centre de masse de la molécule sont réparties symétriquement par rapport à la position d'équilibre, ce qui rejoint l'intuition que l'on a sur un oscillateur classique.

4. Soit $n \geq 2$ un entier.

- a) D'après la relation (1) : $2XH_n = H_{n+1} - 2nH_{n-1}$. On passe aux carrés dans cette égalité, et on développe par identité remarquable.
- b) on part de la relation précédente que l'on multiplie par e^{-x^2} , et on intègre terme à terme, ce qui donne, en utilisant la définition des intégrales $J_{m,n}$:

$$4V_n = J_{n+1,n+1} + 4nJ_{n-1,n+1} + 4n^2J_{n-1,n-1}.$$

Le terme central est nul par **C. 4. a)**. Comme $J_{k,k} = 1/c_k$, on a bien le résultat.

c) En divisant l'égalité précédente par $J_{n,n} = 1/c_n$, on obtient :

$$4V(X_n) = \frac{J_{n+1,n+1}}{J_{n,n}} + 4n^2 \frac{J_{n-1,n-1}}{J_{n,n}} = 2n + 2 + 2n = 4n + 2. \text{ Il ne reste plus qu'à diviser par 4 pour obtenir la variance.}$$

- d) La variance tend vers $+\infty$ avec n : la loi de la variable X_n est de plus en plus étalée (ce qui est corroboré par les graphique). Dans le modèle, cela qui signifie que l'amplitude des vibrations augmente avec l'énergie. On peut constater que la liaison chimique borne l'amplitude des oscillations au sens où pour n fixé, la probabilité d'observer une valeur de X_n en dehors d'un certain intervalle $[-x_M, x_M]$ dépendant de n ($x_M = 15$ par exemple pour $n = 100$ d'après la graphique) est très faible. Le graphique montre en outre une concentration de densité φ_n aux extrémités de $[-x_M, x_M]$, ce qui rejoint l'image classique d'un oscillateur sans frottements : à position extrême, l'énergie cinétique est nulle, donc la vitesse du centre de masse y est nulle. Ainsi, en moyenne sur un grand nombre de mesures de la position, les valeurs observées sont plus fréquentes autour des abscisses $\pm x_M$.

F. Loi de Beer-Lambert

1. a) L'épreuve qui consiste à regarder sur un intervalle I_k donné si il y a eu absorption est une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès p . Comme la variable Z_n mesure le numéro d'apparition du premier succès lors de répétitions successives mutuellement indépendantes de cette épreuve, on déduit que Z_n suit une loi géométrique de paramètre $p = \alpha(\nu) \frac{x}{n}$.

- b) L'évènement $[Z_n > n]$ signifie : «les n premières traversées n'ont pas donné d'absorption», donc par mutuelle indépendance des évènements d'absorption :

$$P(Z_n > n) = (1 - p)^n = \left(1 - \frac{\alpha(\nu)x}{n}\right)^n.$$

2. a) Soit $\lambda > 0$. On simplifie : $\ln u(t) = \frac{1}{t} \ln(1 - \lambda t)$. Ensuite, comme $\lambda t \rightarrow 0$, par produit d'équivalents et équivalents usuels, on obtient $\ln u(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\lambda$. Ainsi $\ln u(t)$ a pour limite λ . Par composition de *limites* (et pas d'équivalents!), $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = e^{-\lambda}$.

- b) C'est immédiat d'après le résultat précédent appliqué avec $t = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $\lambda = \alpha(\nu)x$.

- c) Calculons la fonction de répartition F_X de X . La variable X prend quasi-certainement ses valeurs dans \mathbf{R}_+ , donc $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$. Soit ensuite $x > 0$. Par règles de calcul sur les probabilités, $F_X(x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\alpha(\nu)x}$ d'après la question précédente et le résultat admis de l'énoncé. On reconnaît en F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha(\nu)x$. Comme la fonction de répartition détermine la loi de X : $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\alpha(\nu)x)$.

3. a) Pour un photon donné, l'épreuve qui consiste à observer si il est absorbé ou non au-delà de l'abscisse x est une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès $P(X > x) = e^{-\alpha(\nu)x}$ d'après la question précédente. Comme la variable aléatoire $N(x)$ compte le nombre de succès lors de N répétitions mutuellement indépendantes de l'envoi d'un photon, on déduit que $N(x)$ suit une loi binomiale de paramètres $(N_0, e^{-\alpha(\nu)x})$.

- b) D'après les propriétés de la loi binomiale, l'espérance $E(N(x))$ vaut $E(N(x)) = N_0 e^{-\alpha(\nu)x}$.

- c) Par proportionnalité : $\frac{I}{I_0} = \frac{E(N(x))}{N_0} = \frac{N_0 e^{-\alpha(\nu)x}}{N_0} = e^{-\alpha(\nu)x}$ puisque le nombre initial de photons envoyés suit une loi certaine de paramètre N_0 égal à son espérance.

G. Analyse fréquentielle. Raies d'absorption

1. Le paramètre $\frac{1}{\gamma}$ est l'espérance de la variable D : il mesure donc la durée de vie moyenne de l'état excité.

2. D'après la formule de transfert et par définition de la loi exponentielle, $E(Y)$ existe si l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \gamma e^{-\gamma x} |e^{-i\omega x}| dx$ converge. Or, ωx étant un réel, $|e^{-i\omega x}| = 1$, donc Y admet une espérance puisque l'intégrale généralisée précédente est celle de la densité exponentielle sur \mathbf{R} .

3. a) Calculons $f(\nu)$. Posons $r = \gamma + i\omega$, ce qui donne d'après la formule de transfert et linéarité de l'espérance :

$$f(\nu) = \frac{1}{\gamma} E(Y) = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-rx} dx \underset{r \neq 0}{=} \left[-\frac{e^{-rx}}{r} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{r},$$

la dernière égalité est vraie car si $x \rightarrow +\infty$, $|e^{-rx}| \times |e^{-i\omega x}| = e^{-\gamma x} = o(1)$ puisque $\gamma > 0$.

b) Calculons en utilisant le résultat de **3.a**) : $|f(\nu)|^2 = \frac{1}{|r|^2}$, et comme $|r|^2 = \gamma^2 + \omega^2$, on a bien l'expression annoncée par définition du module, ω et γ étant des réels.

c) Le maximum de $|f(\nu)|^2$ est atteint lorsque $|r|^2$ est minimal, c'est-à-dire lorsque $\nu = \nu_0$. Quand $\nu \rightarrow \nu_0$, $|f(\nu)|^2 \sim \frac{1}{\gamma^2}$. Ainsi, pour une durée de vie très courte de l'état excité (ce qui est le cas à l'échelle atomique), l'amplitude $\frac{1}{\gamma^2}$ est très grande, ce qui explique le pic prononcé sur le graphique.

Pour la fonction $g : u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$, le maximum est $g_{\max} = g(0) = 1$. La largeur du pic au demi-maximum pour la fonction g vaut donc $2u_0$, où $u_0 > 0$ est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée $g_{\max}/2 = 1/2$. Ainsi $1 + u_0^2 = 2$ et $u_0 = 1$. Comme

$$|f(\nu)|^2 = \frac{1}{\gamma^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma}\right)^2} = \frac{1}{\gamma^2} g(u) \quad \text{où} \quad u = \frac{2\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma},$$

la largeur L de la raie spectrale autour de ν_0 est donc donnée par : $2 \times \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{\gamma}{\pi}$: elle est reliée directement à la durée de vie de l'état excité.