

DM 9 : applications linéaires

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$f(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'.$$

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul. Montrer que $P \in \text{Ker}(f)$ si, et seulement si, $\deg(P) = 2$.
(c) Montrer alors que 0 est valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Sous **Python**, pour tout entier naturel non nul n , un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est représenté par la liste de longueur $n + 1$ de ses coordonnées dans la base canonique. On représentera le polynôme nul par la liste vide ou une liste contenant des 0.
(a) Écrire une fonction `derive(P)` qui prend en argument un polynôme non nul et qui renvoie son polynôme dérivé.
(b) Écrire une fonction `XkP(k,P)` qui prend en argument un entier naturel non nul k et un polynôme P , et qui renvoie le polynôme $X^k P$.
(c) Écrire une fonction `f(P)` qui prend en argument un polynôme P et qui renvoie le polynôme $f(P)$.
On pourra étudier à part le cas du polynôme nul et utiliser des listes en compréhension (de même taille!).
3. (a) Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire du degré de $f(P)$ en fonction de n ?
(b) En déduire la valeur de l'entier n telle que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans la suite, on pose $n = 2$. Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. (a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
(b) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
5. (a) Déterminer les valeurs propres de f .
(b) Justifier que f est diagonalisable et déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ constituée de vecteurs propres de f .
(c) Soit $P = 1 + X + X^2$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.
(d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $f^k(P)$.