1. **a)** Si P est un polynôme à coefficients réels, P' aussi. Puisque le produit de polynômes et la somme de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ est dans $\mathbf{R}[X]$, il suit que $f(P) \in \mathbf{R}[X]$.

Soit maintenant P, Q dans $\mathbf{R}[X]$ et λ un réel, et calculons :

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= 2X(P+\lambda Q) - (X^2-1)(P+\lambda Q') && \text{par définition de } f \\ &= 2XP - (X^2-1)P + \lambda(2XQ - (X^2-1)Q') && \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= f(P) + \lambda f(Q) && \text{et distributivité du produit notamment} \end{aligned}$$

et f est bien un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

b) Soit $P \in \ker f$ et *non nul*, montrons que son degré est 2. Soit $a_n X^n$ le terme dominant de P. Comme $P \neq 0$, $a_n \neq 0$, et $n = \deg(P) \geq 0$. Ensuite, par règles de calcul sur le degré, on voit que $f(P) \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$. Précisons la valeur du coefficient de X^{n+1} dans $f(P)$ ($\bullet$: valeur dont on se moque) :

coeff de degré	$n+1$	n	$n-1$	$\dots$	0
$P =$	0	a_n	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$2XP =$	$2a_n$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$P' =$	0	0	na_n	$\bullet$	$\bullet$
$X^2P' =$	na_n	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$f(P) =$	$(2-n)a_n$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

Comme $f(P)$ est nul, le coefficient de X^{n+1} dans $f(P)$ l'est aussi. Or il vaut $(2-n)a_n$ d'après le calcul ci-dessus. Comme $a_n \neq 0$, $2-n=0$. Ainsi $n = 2 = \deg(P)$.

c) Calculons le noyau de f : d'après **1.(b)**, tout vecteur P non nul du noyau est de degré 2. Quitte à diviser P par son coefficient dominant, on peut chercher P sous la forme $P = a_0 + a_1X + X^2$, a_0, a_1 étant deux réels à déterminer. Comme $f(P) = a_1 + 2(a_0+1)X + a_1X^2$, la nullité de $f(P)$ implique celle de ses coefficients, ce qui donne $a_1 = 0$, $a_0 = -1$. Donc $P = 1 - X^2$, et comme $\ker f$ est un sev, $\ker f = \mathrm{Vect}(1-X^2)$. C'est aussi par définition le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0. En particulier $0 \in \mathrm{sp}(f)$.

2. **a)** Par définition, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. D'où :

```python
def derive(P):
    n = len(P)
    if n==1:
        return []
    return [k*a[k] for k in range(1,n)]
```

b) La multiplication d'un polynôme par X^k se traduit sur la liste `L` qui le représente en python par la concaténation `[0]*k + L`. Il suffit ensuite de construire les listes représentant $2XP$, $-X^2P'$ et P' et enfin de sommer les coefficients de ces listes en veillant à bien aligner les termes de même degré par concaténation. Ce qui donne :

```python
def f(P):
    if len(P)==0:           # cas du polynôme nul
        return P
    else:
        XP = [0]+P
        DP = derive(P)
        X2DP = [0,0]+DP     # polynôme X^2 x P'
        P1 =   DP+[0,0]     # P' vu dans IRn+1[X]
        return [2*XP[k] - X2DP[k] + P1[k] for k in range(n+1)]
```

3. Soit a une racine d'ordre au moins 2 de P (c'est-à-dire racine multiple de P). Alors : $P(a) = P'(a) = 0$. Calculons la valeur en a du polynôme $f(P)$: $f(P)(a) = 2aP(a) + (a^2 - 1)P'(a) = 0$. Ainsi, a est bien racine de $f(P)$.

4. **a)** D'après le tableau de calculs de **1. b)**, le degré de $f(P)$ est $n+1$ si $n \neq 2$, et si $n = 2$, il vaut au plus 2.

b) Comme $n + 1 > n$, f est un endomorphisme si et seulement si $n = 2$, et dans ce cas f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

5. **a)** La base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ est $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$. On calcule : $f(1) = 2X, \quad f(X) = 1-X^2, \quad f(X^2) = 2X$.

La matrice de f dans cette base est donc par définition : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) On a trouvé une base du noyau de f en **1(c)** puisque toute famille non nulle d'un seul vecteur est libre. Passons à l'image. D'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2. Or, une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ est donnée par les colonnes de A *en coordonnées*. Ainsi, deux colonnes libres de A fournissent une base de $\operatorname{Im} f$, par exemple les deux premières. Revenant *en vecteurs* et après normalisation, une base de $\operatorname{Im} f$ est $(X, 1 + X^2)$

6. **a)** On travaille en coordonnées : le spectre de f est celui de A. Or, $\lambda \in \operatorname{sp}(A) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ \boxed{2} & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \ell_1 \leftarrow 2\ell_1 + \lambda\ell_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda(4-\lambda^2) \\ \boxed{2} & -\lambda & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -\lambda \end{pmatrix} \quad \ell_1 \leftarrow \ell_1 + (\lambda^2 - 2)\ell_3
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda(4 - \lambda^2) = 0$ et $\operatorname{sp}(A) = \{-2, 0, 2\} = \operatorname{sp}(f)$.

b)
- Comme f possède trois valeurs propres distinctes et est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3, f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
- Pourvλ $\{-2, 0, 2\}$ Notons $\mathscr{E}_\lambda$ le sous-espace propre associée à λ. Comme $\dim \mathscr{E}_\lambda = 1$, tout élément non nul en constitue une base. On a déjà vu que $\mathscr{E}_0$ admet pour base $(1 - X^2)$ par **1c)**. En résolvant les systèmes matriciels $(A \pm 2I_3|0)$ et revenant en vecteurs on trouve que $\mathscr{E}_2 = \operatorname{Vect}\left(1 + 2X + X^2\right)$ et $\mathscr{E}_{-2} = \operatorname{Vect}\left(1 - 2X + X^2\right)$.
- La juxtaposition de bases de $\mathscr{E}_{-2}, \mathscr{E}_0, \mathscr{E}_2$ fournit une base $\mathscr{B}$ de vecteurs propres de $\mathbf{R}_2[X]$ diagonalisant f. Par exemple $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1 = 1 - 2X + X^2 = (1 - X)^2$, $P_2 = -1 + X^2$, $P_3 = 1 + 2X + X^2 = (1 + X)^2$.

c) D'après la formule de changement de base, en notant Π les coordonnées de P sur la base canonique, Π' ses coordonnées sur $\mathscr{B}$ et M la matrice du système de vecteurs $\mathscr{B}$ sur la base canonique (c'est la matrice de passage de$\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$), on a $\Pi = M\Pi'$. La résolution de ce système, qui s'écrit : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, donne $\Pi' = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, c'est-à-dire $P = 1/4P_1 + 3/4P_3$.

d) L'intérêt des bases de vecteurs propres est qu'elles conduisent à des calculs simples sur f. On calcule donc $f^k(P)$ sur la base $\mathscr{B}$. Comme la matrice de f^k sur la base $\mathscr{B}$ est D^k où $D = \operatorname{diag}(-2, 0, 2)$ et que les coordonnées de P sur $\mathscr{B}$ sont Π', il suit que les coordonnées de $f^k(P)$ sur la base $\mathscr{B}$ sont données par $D^k\Pi' = \left((-2)^k/4, \quad 0, \quad 2^k \times 3/4\right)^{\mathsf{T}}$.

Finalement $f^k(P) = \dfrac{(-2)^k}{4}P_1 + 3 \times 2^{k-2}P_3 = 2^{k-2}((-1)^kP_1 + 3P_3)$.