Programme de colles
Semaine 19 du 10/03 au 14/03/2025

Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$

- Vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
- Colinéarité.
- Déterminant de deux vecteurs dans le plan, condition de colinéarité.
- Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$.
- Écriture matricielle du produit scalaire.
- Bilinéarité, symétrie, positivité, définition.
- Norme euclidienne.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Inégalité triangulaire.
- Vecteurs orthogonaux.
- Toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux ne contenant pas le vecteur nul est libre.
- Théorème de Pythagore.
- Base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
- Toute matrice carrée symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et, pour une telle base, la matrice de passage vérifie : $P^{-1} = P^T$.
- Distance entre deux vecteurs.
- Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide de $\mathbf{R}^n$.
- Orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^n$.
- $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$
- Pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $\exists !\,(u_F, u_{F^\perp}) \ \mid \ u = u_F + u_{F^\perp}$
- Projection orthogonale p sur un sous-espace vectoriel F. $\quad p : u \mapsto u_F$
- Écriture de la projection orthogonale p dans une base orthogonale ou orthonormale de F.
- Propriétés : $p \circ p = p$, $\mathrm{Ker}(p) = F^\perp$ et $\mathrm{Im}(p) = F$.
- Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Couples de variables aléatoires réelles (VAR) discrètes

- Notion de couple (X, Y) de VAR discrètes.
- Notation des événements : $[X = x] \cap [Y = y]$ se note $[X = x, Y = y]$.
- Loi conjointe du couple, lois marginales.
- Lois conditionnelles.
- Cas de la somme de deux VAR entières ($X(\Omega), Y(\Omega) \subset \mathbf{N}$).
- Théorème de transfert pour un couple de VAR finies.
- Covariance d'un couple (X, Y), condition d'existence, théorème de König-Huygens.
- Espérance et variance d'une somme $X + Y$.
- VAR discrètes indépendantes : $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors :
  - $*$ $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes pour toutes fonctions f et g
  - $*$ $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \times \mathbf{E}(Y)$
  - $*$ $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$
  - $*$ $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$
- Loi de la somme de deux VAR indépendantes suivant des lois binomiales de même paramètre p.
- Loi de la somme de deux VAR indépendantes suivant des lois de Poisson.
- Généralisation au cas de n VAR mutuellement indépendantes.

Questions de cours :

1. Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$.
2. Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
3. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Énoncer l'inégalité triangulaire.
5. Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbf{R}^n$.
6. Définition d'une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$.
7. Expression de la projection orthogonale sur F dans une base orthonormale de F.
8. Définition de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
9. Lien entre distance et projection orthogonale.
10. Définition de la loi conjointe d'un couple de VAR discrètes.
11. Comment déterminer les lois marginales du couple (X, Y) à partir de sa loi conjointe ?
12. Définir la loi de X conditionnée par un événement $[Y = y]$ de probabilité non nulle.
13. Définir la loi de X sachant Y.
14. Théorème de transfert pour un couple de VAR finies.
15. Définir le covariance d'un couple de VAR discrètes. Condition d'existence.
16. Variance d'une somme de VAR.
17. Définition de l'indépendance de deux VAR discrètes.
18. Conséquence de l'indépendance sur l'espérance d'un produit, et la variance d'une somme.
19. Lien entre indépendance et non corrélation.
20. Stabilité de la loi binomiale.
21. Stabilité de la loi de Poisson.