

**Programme de colles**  
**Semaine 20 du 17/03 au 21/03/2025**

**Couples de variables aléatoires réelles (VAR) discrètes**

- Notion de couple  $(X, Y)$  de VAR discrètes.
- Notation des événements :  $[X = x] \cap [Y = y]$  se note  $[X = x, Y = y]$ .
- Loi conjointe du couple, lois marginales.
- Lois conditionnelles.
- Cas de la somme de deux VAR entières  $(X(\Omega), Y(\Omega) \subset \mathbf{N})$ .
- Théorème de transfert pour un couple de VAR finies.
- Covariance d'un couple  $(X, Y)$ , condition d'existence, théorème de König-Huygens.
- Espérance et variance d'une somme  $X + Y$ .
- VAR discrètes indépendantes :  $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$ .
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors :
  - \*  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes pour toutes fonctions  $f$  et  $g$
  - \*  $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \times \mathbf{E}(Y)$
  - \*  $\text{Cov}(X, Y) = 0$
  - \*  $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$
- Loi de la somme de deux VAR indépendantes suivant des lois binomiales de même paramètre  $p$ .
- Loi de la somme de deux VAR indépendantes suivant des lois de Poisson.
- Généralisation au cas de  $n$  VAR mutuellement indépendantes.

**Théorèmes limites**

- Inégalités de Markov, et de Bienaymé-Tchebychev.
- Moyenne empirique d'une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  :  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ .
- Loi faible des grands nombres.
- Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires **entières**.
- Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.
- Variance empirique  $S_n^2$  et écart-type empirique  $S_n$  :  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2$  et  $S_n = \sqrt{S_n^2}$ .
- Théorème central limite (TCL) première forme : si  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont des VAR indépendantes et suivant une même loi de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ , alors :
 
$$\forall a, b \in \overline{\mathbf{R}} (a \leq b), \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(a < M_n^* \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$
- Théorème de Moivre-Laplace.
- TCL seconde forme : on remplace  $M_n^* = \frac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  par  $\frac{M_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$ .

**Questions de cours :**

1. Définition de la loi conjointe d'un couple de VAR discrètes.
2. Comment déterminer les lois marginales du couple  $(X, Y)$  à partir de sa loi conjointe ?
3. Définir la loi de  $X$  conditionnée par un événement  $[Y = y]$  de probabilité non nulle.
4. Définir la loi de  $X$  sachant  $Y$ .
5. Théorème de transfert pour un couple de VAR finies.
6. Définir le covariance d'un couple de VAR discrètes. Condition d'existence.
7. Variance d'une somme de VAR.
8. Définition de l'indépendance de deux VAR discrètes.
9. Conséquence de l'indépendance sur l'espérance d'un produit, et la variance d'une somme.
10. Lien entre indépendance et non corrélation.

11. Stabilité de la loi binomiale.
12. Stabilité de la loi de Poisson.
13. Énoncer l'inégalité de Markov.
14. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
15. Énoncer la loi faible des grands nombres.
16. Énoncer le théorème central limite.
17. Énoncer le théorème de Moivre-Laplace.