I Fonction réelle de deux variables réelles

1 Cadre de l'étude

On étudie dans ce chapitre des fonctions réelles de deux variables réelles, c'est-à-dire des fonctions

$$f : \begin{cases} D \to \mathbf{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{cases}, \text{ où } D \text{ est une partie de } \mathbf{R}^2.$$

x et y sont donc des nombres réels, et l'image par f du couple (x,y) est un réel $z = f(x,y)$.

Exemple : la loi des gaz parfaits ($PV = nRT$) donne (pour une quantité de gaz n fixée) : $T = \dfrac{PV}{nR}$ c'est-à-dire que la température T est une fonction des variables P et V : $T = f(P,V)$.

On se limite dans ce chapitre à des fonctions de 2 variables. On peut cependant généraliser facilement tous les énoncés qui suivent à des fonctions de 3 variables ou plus.

L'ensemble de définition d'une fonction f de 2 variables x, y est l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des couples $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x,y)$ existe. On se limite ici à des **pavés** de $\mathbf{R}^2$.

2 Pavés de $\mathbf{R}^2$

Définition

On appelle **pavé** de $\mathbf{R}^2$ toute partie $P \subset \mathbf{R}^2$ définie par : $P = I \times J = \{(x,y),\ x \in I,\ y \in J\}$ où I, J sont deux intervalles réels non vides, et non réduits à un point.
On parle de **pavé ouvert** si les intervalles I et J sont des intervalles ouverts.

Exemples : $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ \mathbf{R} \times [0,+\infty[,\ [0,1] \times [-1,1],\ ]0,1[\times \mathbf{R}$ sont des pavés de $\mathbf{R}^2$.

$f : (x,y) \mapsto \ln(x) - \sqrt{1-y}$ est définie sur le pavé $\mathbf{R}_+^\star \times]-\infty, 1]$.

3 Nappe d'une fonction de 2 variables

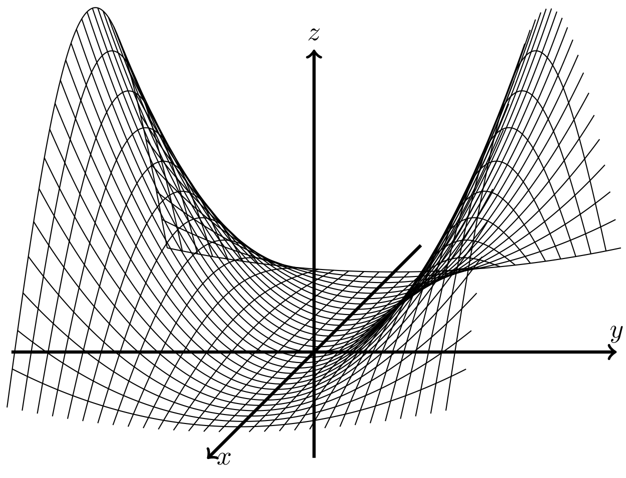
Définition

La représentation graphique d'une fonction $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$ de deux variables est la partie de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$\Gamma_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ \mid\ (x,y) \in \mathcal{D}_f,\ z = f(x,y)\right\}$$

On l'appelle **nappe** (ou surface) représentative de f.

Exemple : Nappe de $(x,y) \mapsto y^2 \cos x$, définie sur $\mathbf{R}^2$:



4 Distance et limites dans $\mathbf{R}^2$

Définition

La **distance** entre deux couples (x,y) et (x',y') est la distance euclidienne entre les vecteurs $u = (x,y)$ et $v = (x',y')$:

$$d\big((x,y),(x',y')\big) = d(u,v) = ||u-v|| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

La **norme** du couple (x,y) est celle du vecteur u : $||(x,y)|| = ||u|| = \sqrt{x^2+y^2} = d\big((x,y),(0,0)\big)$.

Définition

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. On dit que (x, y) **tend vers** (x_0, y_0) dans $\mathbf{R}^2$ lorsque la distance $d\big((x, y), (x_0, y_0)\big)$ tend vers 0 dans $\mathbf{R}_+$.

Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que la fonction f **a pour limite** ℓ, **converge** ou **tend** vers ℓ en (x_0, y_0) si et seulement si $f(x, y)$ tend vers ℓ quand (x, y) tend vers (x_0, y_0) :

$$\lim_{(x_0,y_0)} f = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in \mathcal{D}_f,\ d\big((x, y), (x_0, y_0)\big) < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$$

Exercice 1 : Étudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ et $g(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

5 Continuité

Définition

Soit $\mathcal{D}_f$ un pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$, et soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$.

- On dit que f est **continue en** $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ lorsque : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.
- On dit que f est **continue sur** $\mathcal{D}_f$ lorsque f est continue en tout point de $\mathcal{D}_f$.

Remarque : On prouve la continuité de fonctions de deux variables en invoquant les règles d'opérations pour les fonctions d'une variable. Par exemple, toute fonction polynomiale de deux variables (comme : $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 5y^2$) est définie et continue sur $\mathbf{R}^2$. En pratique, on ne demandera jamais de prouver la continuité d'une fonction de deux variables.

6 Fonctions partielles

Définition

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$, où $\mathcal{D}_f = I \times J$ est un pavé de $\mathbf{R}^2$, et soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$.

On appelle **première fonction partielle de** f **associée à** (x_0, y_0) la fonction $f_1 : \begin{cases} I \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x, y_0) \end{cases}$

On appelle **deuxième fonction partielle de** f **associée à** (x_0, y_0) la fonction $f_2 : \begin{cases} J \to \mathbf{R} \\ y \mapsto f(x_0, y) \end{cases}$

On retient que f_1 ne fait varier que la première variable, f_2 ne fait varier que la deuxième variable.

Les représentations graphiques des fonctions partielles s'obtiennent par intersection de la nappe Γ_f et des plans d'équations $y = y_0$, ou $x = x_0$.

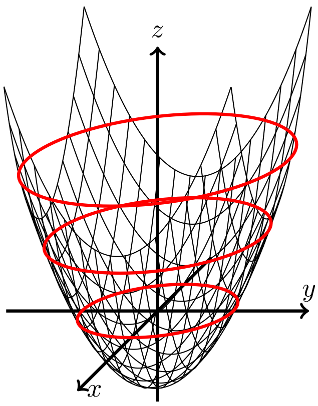
Exercice 2 : Soit $f(x, y) = 2x \ln(1 + y^2)$ définie sur $\mathbf{R}^2$. Expliciter les fonctions partielles de f associées à $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Que dire des intersections de la nappe Γ_f avec les plans verticaux d'équations $y = y_0$?

7 Courbes de niveau

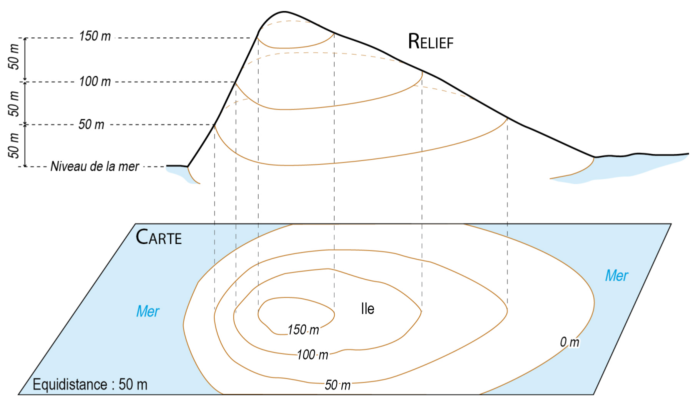
Définition

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ où $\mathcal{D}_f$ est un pavé de $\mathbf{R}^2$, représentée par une nappe Γ_f.
On appelle **courbe de niveau** de f (ou **lignes de niveau**) toute intersection de Γ_f avec un plan horizontal d'équation $z = z_0$.

Exemples : Courbes de niveau pour $z_0 = 0, 1$ ou 2 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.



Exemple de courbe de niveau en cartographie :



II Dérivées partielles

1 Définition

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ une fonction de deux variables définie sur un pavé ouvert $\mathcal{D}_f = I \times J$ de $\mathbf{R}^2$.
On suppose ici que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, les fonctions partielles f_1 et f_2 associées à (x, y) sont dérivables, respectivement sur I et sur J.

Définition

• La **première dérivée partielle** de f est la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} \mathcal{D}_f \to \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \end{cases}$

• La **seconde dérivée partielle** de f est la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y} : \begin{cases} \mathcal{D}_f \to \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \end{cases}$

Autrement dit, si (x, y) est un point de $\mathcal{D}_f$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1'(x)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2'(y)$.

Pour déterminer des dérivées partielles, on dérive l'expression selon une variable, en considérant les autres variables comme des constantes.

Exercice 3 : Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$* \ f : (x, y) \mapsto x^3 + 2xy + 4$ $\qquad * \ g : (x, y) \mapsto \dfrac{x + e^y}{x^2 + 1}$

2 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Définition

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$.
On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathcal{D}_f$ lorsque ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent **et sont continues** sur $\mathcal{D}_f$.

Attention ! Il ne suffit pas que les fonctions partielles f_1 et f_2 soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ou sur J.

Exercice 4 : Soit $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

1) Expliciter les fonctions partielles f_1 et f_2, et montrer qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2) Rappeler la limite de f en $(0, 0)$ trouvée à l'exercice 1. Qu'en déduire ?

3 Règles opératoires

Toutes les règles opératoires concernant la continuité et la dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle s'appliquent aux fonctions de plusieurs variables réelles.

Proposition

Soient f, g deux fonctions définies sur un pavé ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

$*$ Si $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D})$, alors $f + g$, λf, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) sont continues sur $\mathcal{D}$.

$*$ Si f et g admettent des dérivées partielles sur $\mathcal{D}$, alors $f + g$, λf, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) admettent des dérivées partielles sur $\mathcal{D}$ et :

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial(fg)}{\partial x} = g\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\left(g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

et on dispose de formules similaires pour $\dfrac{\partial}{\partial y}$.

$*$ Si $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$, alors $f + g$, λf, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

$*$ Toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur des pavés ouverts où elles sont définies, sauf la valeur absolue et les racines $n^{\text{ème}}$ en des points où elles s'annulent.

4 Dérivée d'une composée

PROPRIÉTÉ

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$, et soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times g' \circ f(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \times g' \circ f(x,y)$$

Exercice 5 : On pose $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+e^x}$ et $g(t) = \sin(2t)$.

Déterminer $\dfrac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(x,y)$ $\quad *$ en utilisant la formule ci-dessus,
$*$ par un calcul direct.

PROPRIÉTÉ

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le pavé ouvert $\mathcal{D}_f = I \times J$. Soient u, v deux fonctions dérivables sur une partie K de $\mathbf{R}$ et à valeurs respectivement dans I et dans J.
Alors la fonction $g : t \mapsto f\big(u(t), v(t)\big)$ est définie et dérivable sur K, de dérivée :

$$\forall t \in K,\ \ g'(t) = u'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t), v(t)\big) + v'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t), v(t)\big)$$

Exercice 6 : On pose $f(x,y) = x^3 + 2xy + 4y$, $u(t) = e^t$ et $v(t) = \sin(t)$.
Déterminer la dérivée de $g : t \mapsto f\big(u(t), v(t)\big)$ $\quad *$ en utilisant la formule ci-dessus,
$*$ par un calcul direct.

PROPRIÉTÉ

Soit $f : \mathcal{D}_f = I \times J \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le pavé ouvert $\mathcal{D}_f$.
On suppose que φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un pavé ouvert $\mathcal{D}'$ de $\mathbf{R}^2$, et à valeurs respectivement dans I et dans J.
Alors $F : (x,y) \in \mathcal{D}' \longmapsto f\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}'$, et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$$

Notation abrégée : $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \times \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \times \dfrac{\partial f}{\partial \psi}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \times \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \times \dfrac{\partial f}{\partial \psi}$

Exercice 7 : On pose $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x,y) = x\sin(y)$ et $\psi(x,y) = \ln(x+y)$.
Déterminer la dérivée de $F(x,y) = f\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$ $\quad *$ en utilisant la formule ci-dessus,
$*$ par un calcul direct.

5 Le gradient

DÉFINITION

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le pavé ouvert $\mathcal{D}_f$. Soit $(x,y) \in \mathcal{D}_f$.
On appelle **gradient** de f en (x,y) le couple $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$.
Il s'agit donc d'un vecteur de $\mathbf{R}^2$, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y)$ ou $\nabla f(x,y)$.

Exercice 8 : Soit $f(x,y) = xe^{-y^2}$. Déterminer le gradient de f en $(1,2)$.

6 Approximation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

PROPRIÉTÉ

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur le pavé ouvert $\mathcal{D}_f$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f(x+h, y+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x,y) + h \times \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \mathrm{o}(h,k)$$

où $\mathrm{o}(h,k)$ désigne une fonction *négligeable* devant (h,k), *ie* : telle que $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{||\mathrm{o}(h,k)||}{||(h,k)||} = 0$.

Remarque : C'est un développement limité à l'ordre 1 de la fonction f en (x,y).

Écriture à l'aide du gradient : $f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + \langle\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y), (h,k)\,\rangle + \mathrm{o}(h,k)$

Exercice 9 : Soit $f : (x,y) \mapsto x^3 + 2xy + 4$ définie sur $\mathbf{R}^2$.
Montrer que : $f\big(1+h, 2+k\big) \underset{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}{\approx} 9 + 7h + 2k$ $\quad *$ en utilisant la formule ci-dessus,
$*$ par un calcul direct.

III Applications

1 Plan tangent à une surface

Soit $f : I \times J \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $(x, y) \in I \times J$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x, y) \neq (0, 0)$.

Alors le plan tangent à Γ_f en $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$ est le plan passant par M et de vecteur normal $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 : Déterminer l'équation du plan tangent à la nappe représentative de la fonction f définie par $f : (x, y) \mapsto \dfrac{2x}{1+y^2}$ au point $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ f(1,1) \end{pmatrix}$

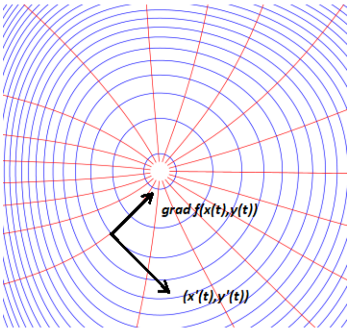
* en utilisant un vecteur normal,
* en utilisant l'approximation d'ordre 1 de f.

2 Courbes de niveau

Soit $f : I \times J \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $z_0 \in \mathbf{R}$. On note $\Gamma_{z_0} = \left\{(x, y, z_0) \in \mathbf{R}^3,\ \ f(x, y) = z_0\right\}$ la courbe de niveau d'altitude z_0 de Γ_f.

On admet que, dans le plan horizontal d'équation $z = z_0$, la courbe de niveau Γ_{z_0} possède une équation paramétrique de la forme $(x(t), y(t))$ où $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont des fonctions dérivables.

Alors en tout point $M(x, y, z_0)$ de Γ_{z_0}, le vecteur $(x'(t), y'(t))$ est tangent à Γ_{z_0}, et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x(t), y(t))$ est orthogonal à Γ_{z_0}.



3 Extréma locaux

Soit $f : \mathcal{D}_f = I \times J \to \mathbf{R}$ définie sur un pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$.

DÉFINITION

On dit que f admet en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ un maximum (*resp :* minimum) **local** s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0) tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}_f,\quad f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \quad \big(\textit{resp} :\quad f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)\big).$$

THÉORÈME

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}_f)$ et admet un extremum local en un point (x_0, y_0) intérieur à $\mathcal{D}_f$, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Les dérivées partielles de f s'annulent donc en tout extremum local situé à l'intérieur de l'ensemble de définition de f. Autrement dit : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}$.

La réciproque est cependant fausse : il se peut que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}$ sans que f n'admette d'extremum local en (x_0, y_0), et même si le point (x_0, y_0) est intérieur à $\mathcal{D}_f$.

DÉFINITION

Un point (x_0, y_0) en lequel $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}$ est appelé un **point critique** de f.

Pour déterminer les éventuels extrema de f, on commence par rechercher les points critiques, qu'on étudie ensuite séparément.

Exercice 11 : Étudier les extréma locaux de $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

4 Ajustement affine des moindres carrés

Soit (x, y) une série statistique bivariée : $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$.

Par exemple, les valeurs x_i, y_i sont issues d'une expérience dans laquelle on essaie de mettre en évidence une relation linéaire entre les grandeurs x_i et y_i. Soit $\big(M_i(x_i, y_i)\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ le nuage de points associé à (x, y). On cherche une droite $\mathcal{D} : y = ax + b$ passant "au plus près" de chacun des points du nuage, par la *méthode des moindre carrés* : c'est la droite pour laquelle la somme des carrés des distances entre les points du nuage et les points de $\mathcal{D}$ de même abscisse est minimale.

Propriété

> Pour toute série statistique bivariée (x,y), il existe une unique droite répondant au problème. Si $\mathbf{V}(x)=0$, c'est une droite verticale. Sinon, cette droite dite *des moindres carrés* a pour équation réduite : $y=ax+b$, avec $a=\dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathbf{V}(x)}$, et elle passe par le point moyen du nuage, soit : $b=\overline{y}-a\overline{x}$.

Cette droite réalise un ajustement linéaire (en réalité affine) de y selon x. On parle de *régression linéaire*.

Si le coefficient de corrélation linéaire r_{xy} est faible, on peut chercher une meilleure corrélation entre $f(x)$ et $g(y)$ où f,g sont des fonctions simples :
$*$ Ajustement exponentiel : $g(y)=\ln y$ conduit à : $\ln y=ax+b$ donc $y=e^{ax+b}$;
$*$ Ajustement logarithmique : $f(x)=\ln x$ conduit à : $y=a\ln x+b$;
$*$ Ajustement selon une puissance : $f(x)=\ln x$ et $g(y)=\ln y$ conduit à : $\ln y=a\ln x+\ln b$ donc $y=bx^a$.

IV Dérivées d'ordre supérieur

1 Définition

Lorsque c'est possible, on définit les dérivées partielles de f d'ordre supérieur par :

Dérivées d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Dérivées d'ordre 3 :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right),\quad \cdots$$

Exercice 12 : Donner les dérivées partielles non nulles de la fonction $(x,y)\mapsto x^3+3xy+5y^2$.

2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition

> Soit $f:\mathcal{D}_f\to\mathbf{R}$ une fonction de deux variables, soit $k\in\mathbf{N}^\star$.
> On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{D}_f$ lorsque toutes les dérivées partielles de f d'ordre k existent et **sont continues** sur $\mathcal{D}_f$.

3 Théorème de Schwarz

Théorème $\quad * *$ **Théorème de Schwarz** $* *$

> Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$, alors $\forall(x,y)\in\mathcal{D}_f$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$.
>
> Si f est de classe C^k sur $\mathcal{D}_f$, alors les dérivées partielles d'ordre k commutent.

4 Approximation d'ordre 2

Théorème $\quad **$ **Approximation d'ordre 2 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$** $**$

> Soit $f:\mathcal{D}_f\to\mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $(x,y)\in\mathcal{D}_f$ un point intérieur à $\mathcal{D}_f$. Alors :
>
> $$\begin{aligned}f(x+h,y+k)\underset{(h,k)\to(0,0)}{=}\ & f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)+\mathrm{o}\left(||(h,k)||^2\right).\end{aligned}$$

Exercice 13 : Déterminer une approximation polynomiale au point $(0,1)$ à l'ordre 2 de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $f(x,y)=e^x(1+y^2)$.

Préciser l'équation du plan tangent à la nappe représentative de f, et indiquer les positions relatives.