Devoir Maison 10

Dans tout l'exercice, on considère $\mathbb{R}^3$ muni produit scalaire canonique. On rappelle que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors leur produit scalaire est :

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
   Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$ et déterminer les sous-espaces propres $E_0(f)$ et $E_1(f)$ de f.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. (a) Écrire une fonction Python `proj(M)` qui prend en argument une matrice carrée M de taille $n \in \mathbb{N}^*$ (tableau numpy) et qui renvoie `True` si $M^2 = M$, `False` sinon.
   On rappelle que pour une matrice `B` *dont les coefficients sont des booléens, la fonction :*
   - `np.any(B)` *renvoie* `True` *si l'un des coefficients de* `B` *vaut* `True`.
   - `np.all(B)` *renvoie* `True` *si tous les coefficients de* `B` *valent* `True`.

   (b) Calculer A^2. Tester la fonction `proj` sur la matrice A. Que remarquez-vous ?
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = E_1(f)$. *On procédera par double inclusion.*
5. (a) Montrer que :
   $$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle.$$
   On pourra utiliser l'écriture matricielle du produit scalaire.

   (b) En déduire que $E_0(f) = E_1(f)^\perp$.
6. Montrer alors que f est la projection orthogonale sur $E_1(f)$.
7. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que
   $$P^\top P = I \quad \text{et} \quad P^\top AP = D.$$
8. Déterminer la distance du vecteur $w = (1, 2, 1)$ à l'espace $E_1(f)$.