Corrigé Devoir Maison 10

1. A est une matrice symétrique à coefficients réels, on peut donc affirmer que :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Détermination de $E_0(f)$:

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_0(f) \quad &\Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & 12y & - & 24z & = & 0 \\ & & 6y & + & 12z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ \\ \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & 0 & = & 0 \\ & & 6y & + & 12z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \\ \\ \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = -2z \\ z = z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } 0 \text{ est valeur propre de } f \text{ et } E_0(f) = \mathrm{Vect}(1,2,-1).}$$

$(1, 2, -1)$ étant non nul, c'est une base de $E_0(f)$.

Détermination de $E_1(f)$:

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_1(f) \quad &\Leftrightarrow \quad (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad x + 2y - z = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = x + 2y \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } 1 \text{ est valeur propre de } f \text{ et } E_1(f) = \mathrm{Vect}\left((1,0,1),(0,1,2)\right).}$$

Les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 2)$ étant non colinéaires, ils constituent une base de $E_1(f)$.
Finalement : $\dim E_0(f) + \dim E_1(f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc f ne possède pas d'autres valeurs propres.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}.}$$

2. La matrice A n'est pas inversible car 0 est valeur propre de A.

3. (a) On propose ici deux versions de la fonction `proj`.

```python
def proj(M):
    N = np.dot(M,M)
    n = np.shape(M)[0]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j] != N[i,j]:
                return False
    return True

def proj(M):
    N = np.dot(M,M)
    return np.all(M == N)
```

(b) Un calcul direct montre que $A^2 = A$.

```python
>>> A = 1/6 * np.array([[5,-2,1],[-2,2,2],[1,2,5]])
>>> proj(A)
False
```

La fonction renvoie `False` à cause des erreurs d'arrondi liées à la représentation dans Python des coefficients de A sous forme de flottants.

4. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = E_1(f)$.
   - Soit $u \in E_1(f)$. On a $(f - \mathrm{id})(u) = 0$ donc $u = f(u) \in \mathrm{Im}(f)$, d'où $E_1(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   - D'après le théorème du rang ($\mathbb{R}^3$ étant de dimension finie) :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3, \quad \text{donc} \quad \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 = \dim(E_1(f))$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Im}(f) = E_1(f).}$$

Remarque. On aurait pu montrer l'autre inclusion, à savoir $\mathrm{Im}(f) \subset E_1(f)$. Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = f(a)$. Donc $f(u) = f^2(a)$. Or $f^2 = f$, donc $f(u) = f^2(a) = f(a) = u$. D'où $u \in E_1(f)$.

5. (a) Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Posons $U = \mathrm{Mat}(u)$ et $V = \mathrm{Mat}(v)$.

$$\langle f(u), v\rangle = (AU)^T V = U^T A^T V \underset{A\text{ sym.}}{=} U^T (AV) = \langle u, f(v)\rangle.$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall (u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle.}$$

(b) Montrons que $E_0(f) = E_1(f)\perp$:
   - Soit $u \in E_0(f)$. Pour $v \in E_1(f)$. On a donc : $f(u) = 0$ et $f(v) = v$.

$$\langle u, v\rangle = \langle u, f(v)\rangle \underset{6.(a)}{=} \langle f(u), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0.$$

     Donc $E_0(f) \subset E_1(f)\perp$.
   - D'après une propriété du cours, on a :

$$\dim(E_1(f)^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(E_1(f)) = 3 - \dim(E_1(f)) = \dim(E_0(f)).$$

$$\boxed{\text{Conclusion } E_0(f) = E_1(f)^\perp.}$$

(c) f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie :
   - $f \circ f = f$
   - $\mathrm{Im}(f) = E_1(f)$ d'après la question 4.
   - $\mathrm{Ker}(f) = E_0(f) = E_1(f)^\perp$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Ces propriétés caractérisent le fait que } f \text{ est la projection orthogonale sur } E_1(f).}$$

6. L'existence de telles matrices P et D relève du théorème spectral.
   On cherche des bases orthonormées de $E_0(f)$ et $E_1(f)$.

   - $E_0(f) = \mathrm{Vect}(1,2,-1)$ et $\|(1,2,-1)\| = \sqrt{6}$. Donc $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ est une base orthonormée de $E_0(f)$.
   - $E_1(f) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,2))$. Soit $u = (1,0,1)$ et $v = (0,1,2)$.
     Posons $v' = v - p_{\mathrm{Vect}(u)}(v) \in E_1(f)$.

     $$v' = v - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2}u = (0,1,2) - \frac{2}{2}(1,0,1) = (-1,1,1)$$

     On a bien $u \perp v'$. Les vecteurs u et v' étant non nuls, ils forment une base orthogonale de $E_1(f)$.
     D'autre part, $\|u\| = \sqrt{2}$ et $\|v\| = \sqrt{3}$.
     Donc $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ est une base orthonormale de $E_1(f)$.

   $$\boxed{\text{En posant } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a bien } P^T A P = D \text{ et } P^T P = I_3.}$$

7. D'après un résultat de cours :

   $$d(w, E_1(f)) = \|w - f(w)\|.$$

   $$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

   Donc

   $$w - f(w) = (1,2,1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

   Alors

   $$\|w - f(w)\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

   Remarque.

   - On aurait pu utiliser la base orthonormée de $E_1(f)$ pour calculer $f(w)$:

     $$f(w) = \frac{\langle w, u\rangle}{\|u\|^2}u + \frac{\langle w, v'\rangle}{\|v'\|^2}v' = u + \frac{2}{3}v' = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

   - On aurait aussi pu directement chercher $f(w)$ sous la forme $au + bv$ (car (u,v) base de $E_1(f)$), et déterminer a et b en remarquant que $w - f(w) \perp u$ et $w - f(w) \perp v$.