DS n°6, mathématique

Durée : 2 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 feuille recto/verso.

Exercice 1 : Étude de corrélation lors du lancer de n dés

Notations : si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant des moments d'ordre 2, alors on note :
- $\mathbf{E}(X)$ l'espérance de X
- $\mathbf{V}(X)$ la variance de X
- $\sigma(X)$ l'écart-type de X
- $\mathrm{Cov}(X, Y)$ la covariance du couple (X, Y)

Si de plus $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$ sont non nulles, alors on pose : $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)}$

$\rho(X,Y)$ est appelé le *coefficient de corrélation linéaire* du couple (X,Y).
Enfin, si U, V sont deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$, on note $\mathbf{P}_U(V)$ la probabilité conditionnelle de V sachant que U est réalisé.

Soit n un entier naturel non nul. Une expérience aléatoire consiste à lancer simultanément n dés bien équilibrés à 6 faces. On s'intéresse aux variables aléatoires :
- S_n, égale à la somme obtenue avec ces n dés,
- A_n, égale au nombre d'*as* (de 1) obtenus lors du lancer des n dés.

On étudie la corrélation entre A_n et S_n. On pose $p = \dfrac{1}{6}$ et $q = 1 - p$.
Dans tout l'exercice, on pourra exprimer de nombreuses réponses en fonction de p et de q.

1. Expliquer pourquoi : $\rho(A_n, S_n) \leqslant 0$. *On ne demande ici aucun calcul.*
2. Donner la loi de A_n. Préciser son espérance, et sa variance.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au résultat du $i^{\text{ème}}$ dé.

3. (a) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, expliciter la loi de X_i.
   (b) Préciser son espérance, et calculer sa variance.
4. (a) Exprimer S_n en fonction des X_i, $i \in [\![1, n]\!]$.
   (b) En déduire l'espérance de S_n, puis la variance de S_n.
5. *Calcul de sommes utiles.* On pose : $\beta_n = \displaystyle\sum_{a=0}^{n-1} \binom{n-1}{a} p^a q^{n-1-a}$ et $\alpha_n = \displaystyle\sum_{a=0}^{n-1} a \binom{n-1}{a} p^a q^{n-1-a}$.
   (a) Calculer β_n.
   (b) En reconnaissant l'espérance d'une loi usuelle, calculer α_n.
6. En utilisant le théorème de transfert, montrer que :
$$\mathbf{E}(A_n \times X_1) = \sum_{a=1}^{n} \frac{a}{6} \mathbf{P}_{[X_1=1]}(A_n = a) + \sum_{k=2}^{6} \left(\sum_{a=0}^{n-1} \frac{ka}{6} \mathbf{P}_{[X_1=k]}(A_n = a) \right).$$
7. (a) Soit B_n le nombre d'*as* obtenus avec les n dés en excluant le premier.
   Exprimer $\mathbf{P}_{[X_1=k]}(A_n = a)$ à l'aide de B_n. *On distinguera selon la valeur de k.*
   (b) Déduire des questions précédentes que : $\mathbf{E}(A_n \times X_1) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{7}{2}(n-1)p$.
8. (a) Que vaut $\mathbf{E}(A_n \times X_i)$ pour $i \geqslant 2$?
   (b) En déduire l'espérance de $A_n \times S_n$.

9. Montrer enfin que : $\mathrm{Cov}(A_n, S_n) = -\dfrac{5n}{12}$.
10. En déduire l'expression de $\rho(A_n, S_n)$ en fonction de n. Que remarque-t-on ?
11. Dans cette dernière question, on pose $n = 12$. Ainsi, $\mathbf{E}(S_{12}) = 42$ et $\mathbf{V}(S_{12}) = 35$.
    On suspecte que l'un au moins des 12 dés est truqué, et on souhaite effectuer un test portant sur l'hypothèse :
    $$H_0 : \text{« la moyenne } \mu \text{ de } S_{12} \text{ est bien égale à 42 »}.$$
    On effectue $N = 100$ réalisations de S_{12}, et on note M_{100} la moyenne empirique observée.
    On obtient à l'issue de ces $N = 100$ réalisations : $M_{100} = 40$.
    (a) Donner un intervalle I tel que, sous l'hypothèse H_0 : $\mathbf{P}(M_{100} \in I) \approx 0,95$.
    On pourra utiliser le théorème central limite, et on donne la valeur approchée : $\Phi^{-1}(0,975) \approx 2$, *où* Φ *désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, ainsi que :* $\sqrt{35} \approx 6$.
    (b) Doit-on rejeter l'hypothèse H_0 au seuil d'erreur de 5% ? Justifier.

Exercice 2 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, avec $n \geqslant 2$, muni du produit scalaire euclidien, noté $\langle .\,, .\rangle$.
Soient u et v deux vecteurs **non colinéaires** de $\mathbf{R}^n$, et tels que : $\|u\|^2 = \|v\|^2 = 1$.
On définit l'application f sur $\mathbf{R}^n$ par :

$$\forall w \in \mathbf{R}^n,\ f(w) = \langle w, u\rangle v + \langle w, v\rangle u$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.
2. (a) Exprimer $\|u+v\|^2$ puis $\|u-v\|^2$ en fonction de $\langle u, v\rangle$.
   (b) En déduire que : $\langle u, v\rangle^2 < 1$.
   (c) Montrer que $\big(f(u), f(v)\big)$ est une famille libre.
3. (a) Montrer que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. On suppose **dans cette question** que u et v sont orthogonaux.
   Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-2})$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-2})$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
   (c) Montrer que $u+v$ et $u-v$ sont des vecteurs propres de f.
   (d) En déduire que f est diagonalisable.
5. On se place **dans cette question** dans $\mathbf{R}^4$, et on pose : $u = \dfrac{1}{3}(2,2,1,0)$ et $v = \dfrac{1}{3}(-1,0,2,2)$.
   On note p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u,v)$, et on définit le vecteur $w_0 = (0,0,2,2) \in \mathbf{R}^4$.
   (a) Montrer que (u, v) est une famille orthonormale.
   (b) Déterminer $p(w_0)$.
   (c) Calculer la distance du vecteur w_0 au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u, v)$.
6. On revient ici au cas général : u et v sont non colinéaires mais pas nécessairement orthogonaux.
   Soit $(w_1, \cdots, w_{n-2})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{D} = (u, v, w_1, \cdots, w_{n-2})$ est une base de $\mathbf{R}^n$.
   Indication : on pourra appliquer f *à une combinaison linéaire nulle des vecteurs de* $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{D}$.
   (c) Montrer que f est diagonalisable.