Corrigé du DS n°6

Exercice 1 : Étude de corrélation

1. A_n et S_n sont négativement corrélées
Lors du lancer des n dés, plus on obtient d'*as* (plus A_n est grand), et plus la somme des n dés sera petite.
Ainsi, $\mathrm{Cov}(A_n, S_n) \leqslant 0$. On en déduit que : $\boxed{\rho(A_n, S_n) \leqslant 0.}$

2. $A_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit Y_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ dé amène un *as*, et 0 sinon.
Alors Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$ et $A_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
Puisque les variables aléatoires Y_i sont mutuellement indépendantes, on en déduit que A_n suit une loi binomiale de paramètres n et p. D'après le cours, on a : $\boxed{\mathbf{E}(A_n) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(A_n) = npq.}$

3. (a) Loi des X_i
Les dés étant bien équilibrés : $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1,6]\!]\big).}$
(b) Espérance et variance des X_i
D'après le cours, on a : $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{E}(X_i) = \dfrac{6+1}{2} = \dfrac{7}{2}.}$
On utilise la formule de König-Huygens pour calculer la variance de X_i : $\mathbf{V}(X_i) = \mathbf{E}(X_i^2) - \mathbf{E}(X_i)^2$.
D'après le théorème de transfert, $\mathbf{E}(X_i^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2 \times \mathbf{P}(X_i = k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = \frac{91}{6}$.
Donc $\mathbf{V}(X_i) = \dfrac{91}{6} - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{182 - 147}{12}$. Conclusion : $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{V}(X_i) = \dfrac{35}{12}.}$

4. (a) Expression de S_n en fonction des X_i
S_n est la somme des résultats de tous les dés donc : $\boxed{S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i.}$
(b) Espérance et variance de S_n
Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i)$ donc $\boxed{\mathbf{E}(S_n) = \dfrac{7n}{2}.}$
Les X_i étant mutuellement indépendantes, on a : $\mathbf{V}(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i)$ donc : $\boxed{\mathbf{V}(S_n) = \dfrac{35n}{12}.}$

5. Deux sommes utiles
(a) $\beta_n = \displaystyle\sum_{a=0}^{n-1} \binom{n-1}{a} p^a q^{n-1-a} = (p+q)^{n-1}$ en reconnaissant une somme de Newton.
Puisque $q = 1 - p$, on a : $\boxed{\beta_n = 1.}$
(b) Soit Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n-1$ et p. On sait alors que $\mathbf{E}(Z) = (n-1)p$.
Mais : $\mathbf{E}(Z) = \displaystyle\sum_{a \in Z(\Omega)} a \times \mathbf{P}(Z = a) = \sum_{a=0}^{n-1} a \binom{n-1}{a} p^a q^{n-1-a} = \alpha_n$. Conclusion : $\boxed{\alpha_n = (n-1)p.}$

6. Théorème de transfert
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(A_n \times X_1) &= \sum_{k \in X_1(\Omega)} \sum_{a \in A_n(\Omega)} ka \times \mathbf{P}\big(X_1 = k,\ A_n = a\big) \quad \text{d'après le théorème de transfert} \\ &= \sum_{k=1}^{6} \sum_{a=0}^{n} ka \times \mathbf{P}\big(X_1 = k\big) \times \mathbf{P}_{[X_1 = k]}\big(A_n = a\big)\end{aligned}$$
D'une part, $\forall k \in [\![1,6]\!],\ \mathbf{P}(X_1 = k) = \dfrac{1}{6}$.
D'autre part, on peut séparer la somme double précédente en isolant le terme $k = 1$:
$$\mathbf{E}(A_n \times X_1) = \sum_{a=0}^{n} \frac{a}{6} \times \mathbf{P}_{[X_1=1]}\big(A_n = a\big) + \sum_{k=2}^{6} \sum_{a=0}^{n} \frac{ka}{6} \times \mathbf{P}_{[X_1=k]}\big(A_n = a\big)$$
On remarque enfin que dans la première somme, le terme $a = 0$ est nul, et dans la deuxième somme, le terme $a = n$ est nul car on n'a pas obtenu d'*as* avec le premier dé ($k \geqslant 2$).

Conclusion : $\boxed{\mathbf{E}(A_n \times X_1) = \sum_{a=1}^{n} \frac{a}{6} \times \mathbf{P}_{[X_1=1]}\big(A_n = a\big) + \sum_{k=2}^{6}\sum_{a=0}^{n-1} \frac{ka}{6} \times \mathbf{P}_{[X_1=k]}\big(A_n = a\big).}$

7. Espérance de $A_n \times X_1$
(a) Remarquons d'abord que : $B_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, p)$.
Si $[X_1 = 1]$, on a obtenu un *as* avec le premier dé, donc il en reste $a-1$ à obtenir avec les autres :
$$\mathbf{P}_{[X_1=1]}(A_n = a) = \mathbf{P}(B_n = a-1) = \binom{n-1}{a-1} p^{a-1} q^{n-a}$$
Si $[X_1 \neq 1]$, il faut obtenir tous les *as* avec les dés restants :
$$\forall k \geqslant 2,\ \mathbf{P}_{[X_1=k]}(A_n = a) = \mathbf{P}(B_n = a) = \binom{n-1}{a} p^{a} q^{n-1-a}$$
(b) D'après les questions **6)** et **7a)** :
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(A_n \times X_1) &= \sum_{a=1}^{n} \frac{a}{6} \times \binom{n-1}{a-1} p^{a-1} q^{n-a} + \sum_{k=2}^{6}\sum_{a=0}^{n-1} \frac{ka}{6} \times \binom{n-1}{a} p^{a} q^{n-1-a} \\
&= \sum_{a=0}^{n-1} \frac{a+1}{6} \times \binom{n-1}{a} p^{a} q^{n-1-a} + \sum_{k=2}^{6}\sum_{a=0}^{n-1} \frac{ka}{6} \times \binom{n-1}{a} p^{a} q^{n-1-a} \quad \text{par glissement d'indices} \\
&= \frac{1}{6} \times \beta_n + \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{6} \times \alpha_n \quad \text{par linéarité dans la première somme, et en regroupant avec la deuxième} \\
&= \frac{1}{6} \times \beta_n + \frac{\alpha_n}{6} \sum_{k=1}^{6} k \quad \text{et on utilise enfin les résultats des questions } \mathbf{5a)} \text{ et } \mathbf{5b)}
\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\mathbf{E}(A_n \times X_1) = \frac{1}{6} + \frac{7}{2}(n-1)p.}$

8. Espérance de $A_n \times S_n$
(a) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}(A_n \times X_i) = \mathbf{E}(A_n \times X_1)$ puisque chaque dé joue un rôle similaire dans l'expérience.
(b) $\mathbf{E}(A_n \times S_n) = \mathbf{E}\left(A_n \times \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(A_n \times X_i)$ par linéarité de l'espérance.
Conclusion : $\boxed{\mathbf{E}(A_n \times S_n) = \frac{n}{6} + \frac{7}{2} n(n-1)p.}$

9. Covariance du couple (A_n, S_n)
D'après la formule de König-Huygens : $\mathrm{Cov}(A_n, S_n) = \mathbf{E}(A_n \times S_n) - \mathbf{E}(A_n) \times \mathbf{E}(S_n)$.
On utilise les questions **2)**, **4b)** et **8b)** pour conclure :
$\mathrm{Cov}(A_n, S_n) = \frac{n}{6} + \frac{7}{2} n(n-1)p - np \times \frac{7n}{2} = \frac{1}{12}\big(2n + 7n(n-1) - 7n^2\big)$ Conclusion : $\boxed{\mathrm{Cov}(A_n, S_n) = -\frac{5n}{12}.}$

10. Coefficient de corrélation linéaire
Par définition : $\rho(A_n, S_n) = \dfrac{\mathrm{Cov}(A_n, S_n)}{\sigma(A_n) \times \sigma(S_n)} = \dfrac{-\frac{5n}{12}}{\sqrt{npq} \times \sqrt{\frac{35n}{12}}}$ d'après les questions **2)** et **4b)**
On trouve après simplifications : $\boxed{\rho(A_n, S_n) = -\sqrt{\frac{3}{7}}.}$
Cela confirme bien que $\rho(A_n, S_n) < 0$ et on remarque qu'il ne dépend pas du nombre n de dés utilisés.

11. Intervalle de fluctuation pour M_n (a) On effectue N réalisations indépendantes de la VAR S_{12} de moyenne 42 et de variance 35. D'après le théorème central limite, la suite $(M_N^\star)$ suit asymptotiquement la loi normale centrée réduite. D'après l'énoncé, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \approx 0,95$ donc $\mathbf{P}\big(M_N^\star \in [-2, 2]\big) \approx 0,95$, cette approximation étant valable puisque $N = 100 \geqslant 30$. Or, $M_N^\star = \dfrac{M_N - \mathbf{E}(M_N)}{\sqrt{\mathbf{V}(M_N)}} = \dfrac{M_N - 42}{\sqrt{\frac{35}{N}}}$. Pour $N = 100$, on obtient : $M_{100}^\star = \dfrac{10}{\sqrt{35}}(M_{100} - 42)$.
On a : $[-2 \leqslant M_{100}^\star \leqslant 2] = [40,8 \leqslant M_{100} \leqslant 43,2]$ donc $\boxed{\mathbf{P}\big(M_{100} \in [40,8\,;\,43,2]\big) \approx 0,95.}$
(b) Rejet de H_0
La moyenne empirique $M_{100} = 40$ n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation.
$\boxed{\text{Au seuil d'erreur de 5\%, on décide de rejeter } H_0 \text{ : il y a au moins un dé truqué parmi les 12 dés.}}$

Exercice 2 : Endomorphisme de $\mathbf{R}^n$

1. <u>f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$</u>
   Par définition, pour tout $w \in \mathbf{R}^n$, $f(w)$ est une combinaison linéaire des vecteurs u et v de $\mathbf{R}^n$, donc $f(w) \in \mathbf{R}^n$.
   Montrons que f est linéaire : soient $w_1, w_2 \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,
   $$\begin{aligned} f(\lambda w_1 + w_2) &= \langle \lambda w_1 + w_2, u\rangle v + \langle \lambda w_1 + w_2, v\rangle u \\ &= \big(\lambda\langle w_1, u\rangle + \langle w_2, u\rangle\big)v + \big(\lambda\langle w_1, v\rangle + \langle w_2, v\rangle\big)u \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \lambda\big(\langle w_1, u\rangle v + \langle w_1, v\rangle u\big) + \big(\langle w_2, u\rangle v + \langle w_2, v\rangle u\big) \\ &= \lambda f(w_1) + f(w_2) \qquad \text{donc } f \text{ est linéaire. Conclusion : } \boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n).} \end{aligned}$$

2. <u>Les vecteurs $f(u)$ et $f(v)$ sont libres.</u>
   (a) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle$ par bilinéarité et symétrie du produit scalaire
   $= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle = 2\big(1 + \langle u,v\rangle\big)$ car d'après l'énoncé $\|u\|^2 = \|v\|^2 = 1$.
   De même, $\|u-v\|^2 = 2\big(1 - \langle u,v\rangle\big)$.
   (b) u et v sont non colinéaires donc $u+v$ et $u-v$ sont non nuls : leurs normes sont **strictement** positives.
   Ainsi : $\begin{cases} 1 + \langle u,v\rangle > 0 \\ 1 - \langle u,v\rangle > 0 \end{cases}$ donc on obtient l'encadrement : $-1 < \langle u,v\rangle < 1$, autrement dit : $\boxed{\langle u,v\rangle^2 < 1.}$
   (c) $f(u) = \|u\|^2 v + \langle u,v\rangle u = v + \langle u,v\rangle u$ et de même $f(v) = u + \langle u,v\rangle v$.
   Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $af(u) + bf(v) = 0$. On a alors : $\big(a\langle u,v\rangle + b\big)u + \big(a + b\langle u,v\rangle\big)v = 0$.
   Par hypothèse, u et v sont non colinéaires, donc (u,v) est libre. On en déduit que : $\begin{cases} a\langle u,v\rangle + b = 0 \\ a + b\langle u,v\rangle = 0 \end{cases}$
   Le déterminant de ce système est : $\delta = \langle u,v\rangle^2 - 1 < 0$ d'après **2b)**, donc $\delta \neq 0$.
   Le système (S) est donc de Cramer, et homogène. Il possède comme unique solution : $a = 0$, $b = 0$.
   On en conclut que $\boxed{\big(f(u), f(v)\big) \text{ est libre.}}$

3. <u>$\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$</u>
   (a) Pour tout $w \in \mathbf{R}^n$, $f(w) \in \mathrm{Vect}(u,v)$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$.
   De plus, $f(u), f(v) \in \mathrm{Im}(f)$ et $\big(f(u), f(v)\big)$ est libre, donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \geqslant 2$.
   Mais puisque $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$ qui est de dimension 2, on a égalité : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u,v).}$
   (b) D'après le théorème du rang : $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbf{R}^n) = n$
   et on vient de voir que $\mathrm{rg}(f) = 2$, donc $\boxed{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = n - 2.}$

4. <u>Cas où u et v sont orthogonaux</u>
   (a) <u>Une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$</u>
   $\ast$ Montrons que $\mathcal{C}$ est une famille orthonormale.
   Par hypothèse, tous les ε_i, ainsi que u et v sont de norme 1.
   Par hypothèse encore, $u \perp v$ et $\varepsilon_i \perp \varepsilon_j$ pour tous $i \neq j$.
   Il faut donc montrer que : $\forall i \in [\![1, n-2]\!]$, $u \perp \varepsilon_i$ et $v \perp \varepsilon_i$.
   Soit $i \in [\![1, n-2]\!]$. On sait que $\varepsilon_i \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(\varepsilon_i) = 0$, soit : $\langle \varepsilon_i, u\rangle v + \langle \varepsilon_i, v\rangle u = 0$.
   On vient d'écrire une combinaison linéaire nulle des vecteurs libres u et v, donc on a : $\begin{cases} \langle \varepsilon_i, u\rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_i, v\rangle = 0 \end{cases}$
   c'est-à-dire : $\varepsilon_i \perp u$ et $\varepsilon_i \perp v$. En conclusion, la famille $\mathcal{C}$ est une famille orthonormale.
   $\ast$ Montrons que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbf{R}^n$.
   $\mathcal{C}$ est une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul, donc elle est libre.
   Étant de cardinal $n = \dim(\mathbf{R}^n)$, c'est une base de $\mathbf{R}^n$. Conclusion : $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base orthonormale de } \mathbf{R}^n.}$
   (b) <u>Matrice de f dans la base $\mathcal{C}$</u>
   On a : $f(u) = v + \langle u,v\rangle u = v$, $f(v) = u + \langle u,v\rangle v = u$ et $f(\varepsilon_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$.
   $$\text{On a donc : } \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}.$$

(c) <u>$u+v$ et $u-v$ vecteurs propres de f.</u> $u+v$ et $u-v$ sont non nuls. On calcule :

$f(u+v)=f(u)+f(v)=v+u=u+v$ donc $u+v$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre 1,
$f(u-v)=f(u)-f(v)=v-u=-(u-v)$ donc $u-v$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.

(d) <u>Diagonalisabilité de f</u>

On a $\dim\big(E_0(f)\big)=\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big)=n-2$. Puisque $\dim\big(E_1(f)\big)\geqslant 1$ et $\dim\big(E_{-1}(f)\big)\geqslant 1$, on a nécessairement $\dim\big(E_1(f)\big)=\dim\big(E_{-1}(f)\big)=1$, $\operatorname{Sp}(f)=\{-1,0,1\}$ et $\sum\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)}\dim\big(E_\lambda(f)\big)=n$ donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

5. <u>Exemple dans $\mathbf{R}^4$</u>

(a) <u>(u,v) famille orthonormale</u>

On calcule $\langle u,v\rangle=\dfrac{1}{9}(2\times(-1)+2\times 0+1\times 2+0\times 2)=0$ donc $u\perp v$,

puis : $\langle u,u\rangle=\|u\|^2=\dfrac{1}{9}(2^2+2^2+1^2+0^2)=1$ et de même $\|v\|^2=1$, donc u,v sont normés.

Conclusion : $\boxed{(u,v) \text{ est une famille orthonormale de } \mathbf{R}^4.}$

(b) <u>Projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(u,v)$</u>

Puisque (u,v) est une base orthonormale de $\operatorname{Vect}(u,v)$, on a : $\forall w\in\mathbf{R}^4$, $p(w)=\langle w,u\rangle u+\langle w,v\rangle v$.

On calcule alors $\langle w_0,u\rangle=\dfrac{2}{3}$ et $\langle w_0,v\rangle=\dfrac{8}{3}$, donc $p(w_0)=\dfrac{2}{3}u+\dfrac{8}{3}v$.

Conclusion : $\boxed{p(w_0)=\dfrac{1}{9}(-4,4,18,16).}$

(c) <u>Distance de w_0 à $\operatorname{Vect}(u,v)$</u>

On a : $d\big(w_0,\operatorname{Vect}(u,v)\big)=\|w_0-p(w_0)\|=\left\|\dfrac{1}{9}(4,-4,0,2)\right\|=\dfrac{1}{9}\sqrt{4^2+(-4)^2+0^2+2^2}=\dfrac{1}{9}\sqrt{36}.$

Conclusion : $\boxed{\text{la distance de } w_0 \text{ à } \operatorname{Vect}(u,v) \text{ est : } \dfrac{2}{3}.}$

6. <u>Cas général</u>

(a) <u>Une base de $\mathbf{R}^n$</u>

Montrons que $\mathcal{D}=(u,v,w_1,\cdots,w_{n-2})$ est libre.

Soit une combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathcal{D}$: $au+bv+\sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i w_i=0\quad(1).$

On compose (1) par f. Par linéarité, on obtient : $af(u)+bf(v)+\sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i f(w_i)=f(0)=0.$

Mais tous les w_i sont dans $\operatorname{Ker}(f)$ donc $f(w_i)=0$. Il reste donc : $af(u)+bf(v)=0$.
D'après **2c)**, $\big(f(u),f(v)\big)$ est libre donc $a=b=0$.

En réinjectant dans (1) : $\sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i w_i=0$. Enfin, la famille $(w_1,\cdots,w_{n-2})$ étant libre, on a : $\forall i\in[\![1,n-2]\!]$, $\lambda_i=0$.

Conclusion : la famille $\mathcal{D}$ est libre. Étant de cardinal $n=\dim(\mathbf{R}^n)$, $\boxed{\mathcal{D} \text{ est une base de } \mathbf{R}^n.}$

(b) <u>Matrice de f dans la base $\mathcal{D}$</u>

D'après les expressions précédentes de $f(u)$ et de $f(v)$, et puisque $\forall i\in[\![1,n-2]\!]$, $f(w_i)=0$, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{D}}(f)=\begin{pmatrix}\langle u,v\rangle & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \langle u,v\rangle & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.}$$

(c) <u>Diagonalisabilité de f</u>

$f(u+v)=f(u)+f(v)=\big(\langle u,v\rangle u+v\big)+\big(u+\langle u,v\rangle v\big)=\big(\langle u,v\rangle+1\big)(u+v).$

Étant non nul, $u+v$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\alpha=\langle u,v\rangle+1$.
De même, $f(u-v)=\big(\langle u,v\rangle-1\big)(u-v)$ donc $u-v$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\beta=\langle u,v\rangle-1$.
On a $\dim\big(E_0(f)\big)=\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big)=n-2$ donc $\dim\big(E_\alpha(f)\big)=\dim\big(E_\beta(f)\big)=1$, $\operatorname{Sp}(f)=\{\alpha,\,\beta,\,0\}$
et $\sum\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)}\dim\big(E_\lambda(f)\big)=n$ donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$