

I	<u>Nombres complexes</u>	page 2
1.	<u>Représentations d'un nombre complexe</u>	
2.	<u>Opérations dans \mathbb{C}</u>	page 3
3.	<u>Résolutions d'équations dans \mathbb{C}</u>	page 4
4.	<u>Fonctions à valeurs dans \mathbb{C}</u>	page 5
II	<u>Trigonométrie</u>	
1.	<u>Trigonométrie réciproque</u>	
2.	<u>Transformation de $a \cos \theta + b \sin \theta$ où a, b et θ sont réels</u>	page 6
3.	<u>Linéarisation d'expression de la forme $\cos^m \theta \sin^n \theta$</u>	page 7
4.	<u>Transformation de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$</u>	
5.	<u>Formules trigonométriques</u>	

I Nombres complexes

1. Représentations d'un nombre complexe

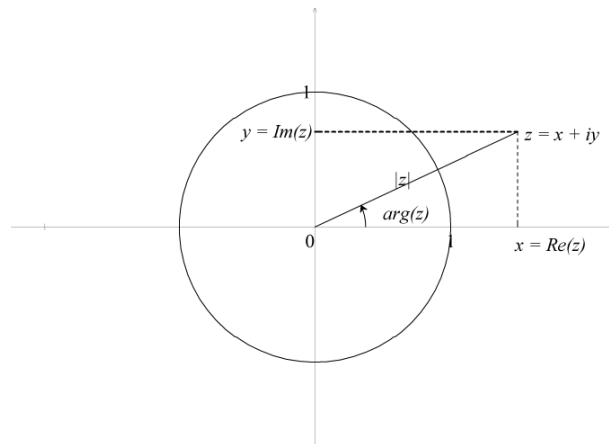
Définition 1 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

- à chaque point $M(x, y)$, on associe son affixe $z = x + iy$
- à chaque nombre complexe $z = x + iy$, on associe son point image $M(x, y)$
- $x = \mathcal{R}e(z)$ est la partie réelle et $y = \mathcal{I}m(z)$ est la partie imaginaire de z
- l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est l'argument de z (si $z \neq 0$). On note $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \arg z \ (2\pi)$
- le nombre complexe nul n'admet pas d'argument
- la norme de \overrightarrow{OM} est le module de z . On note $\|\overrightarrow{OM}\| = |z|$.

L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} .

Notations L'écriture du nombre complexe $z = x + iy$ est la forme algébrique de z .

L'écriture du nombre complexe $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg z \ (2\pi)$ est la forme exponentielle de z .



Proposition 1 • $\forall z \in \mathbb{C}, z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.

- $\forall z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = 0 \ (\pi)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$.

Proposition 2 Soit $z = x + iy = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul où $x = \mathcal{R}e(z)$, $y = \mathcal{I}m(z)$ et $r = |z|$, $\theta = \arg z$.

$$\text{Alors } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

En particulier : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

Exercice 1 Donner modules et arguments des nombres complexes : $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 + i$.

Proposition 3 Soit z et z' deux nombres complexes.

- si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors $z = z' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$
- si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ alors $z = z' \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' \ (2\pi)$.

Remarque Soit z un nombre complexe, z est de module égal à 1 si, et seulement si : $\exists \theta \in \mathbb{R} \mid z = e^{i\theta}$

Proposition 4 Formule d'Euler

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

2. Opérations dans \mathbb{C}

Définition 2 Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ et de formes exponentielles $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$.

$$\text{Alors } z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y) = rr' e^{i(\theta + \theta')}.$$

$$\text{et si } z \neq 0, \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

Exercice 2 1) Déterminer les forme algébrique et exponentielle de $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$.

2) Soit $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Calculer z^2 , en déduire la forme exponentielle de z .

Proposition 5 Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$$|zz'| = |z||z'| \text{ et } \arg(zz') = (\arg z) + (\arg z') \pmod{2\pi}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = (\arg z) - (\arg z') \pmod{2\pi}$$

Proposition 6 Formule du binôme de Newton :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (z + z')^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$$

Proposition 7 Formule de Moivre :

Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ de formes exponentielles : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, z_k = r_k e^{i\theta_k}$.

$$\text{Alors } \prod_{k=1}^n z_k = \left(\prod_{k=1}^n r_k \right) e^{i \sum_{k=1}^n \theta_k}. \text{ En particulier : } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Définition 3 Soit $z = x + iy = re^{i\theta}$ un nombre complexe.

Le nombre complexe conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$.

Proposition 8 $\forall z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

$\forall z \in \mathbb{C}, z\bar{z} = |z|^2$. On en déduit que, si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ et si $|z| = 1$ alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$

$\forall z \in \mathbb{C}, |\bar{z}| = |z|$ et $\arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$.

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ et si z' est non nul, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

Proposition 9 $\forall z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Exercice 3 1) z et z' sont deux complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.

2) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$.

Définition 4 Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$.

On appelle exponentielle de z , le nombre complexe non nul, noté e^z , défini par :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Proposition 10 $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z = i2k\pi$$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z' = z + i2k\pi$$

Remarque On prolonge ainsi la fonction exponentielle à \mathbb{C} . Si $z \in \mathbb{C}$ alors $|e^z| = e^{\operatorname{Re}z}$ et $\arg(e^z) = \operatorname{Im}z \pmod{2\pi}$

3. Résolutions d'équations dans \mathbb{C}

Définition 5 Les racines carrées du complexe z sont les deux complexes $\pm\omega$ tels que $\omega^2 = z$.

Proposition 11 Soit $z \in \mathbb{C}$.

• Si $z = re^{i\theta}$ alors les deux racines carrées de z sont $\pm\rho e^{i\alpha}$ où $\rho = \sqrt{r}$ et $\alpha = \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}$

• Si $z = a + ib$ alors les deux racines carrées de z sont $\pm(x + iy)$

$$\text{où } x \text{ et } y \text{ vérifient le système } \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}.$$

Exercice 4 Déterminer les racines carrées de $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 45 - 25i$ et $z_3 = \frac{1+i}{1-i}$.

Définition 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle racine n -ième de l'unité les solutions de l'équation $z^n = 1$.

Exercice 5 Résoudre dans \mathbb{C} les équations $z^3 = 1$ et $z^7 - 1 = 0$.

Remarque • les racines n -ièmes de l'unité sont les n nombres : $z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

• en notant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, les racines cubiques de l'unité sont $1, j$ et j^2 . On a $\bar{j} = j^2, j^2 + j + 1 = 0$

Proposition 12 Soit l'équation (E) $az^2 + bz + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$.

La forme canonique du trinôme est :

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \text{ où } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Soit δ l'une des deux racines carrées de Δ , alors les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Les relations coefficients-racines du trinôme sont :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque Si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions réelles distinctes $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une unique solution réelle $z = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ alors (E) admet deux solutions conjuguées $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercice 6 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $z^2 + z + 1 = 0$

2) $z^3 = -(2 + i)^3$

3) $1 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right) + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = 0$. On pourra poser $Z = \frac{z+1}{z-1}$

4. Fonctions à valeurs dans \mathbb{C}

Soit φ une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

Les définitions et propriétés s'étendent facilement à ce cas en posant $f(x) = \mathcal{R}e(\varphi(x))$ et $g(x) = \mathcal{I}m(\varphi(x))$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + i \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

• Si f et g sont dérivables en a alors $\varphi'(x) = f'(x) + ig'(x)$

• Si f et g admettent des primitives F et G sur un intervalle I alors φ admet une primitive Φ définie par $\Phi(x) = F(x) + iG(x)$

• On pose alors $\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b f(x)dx + i \int_a^b g(x)dx$

Exercice 7 Pour tout réel x , on pose $\varphi(x) = e^{zx}$ où $z \in \mathbb{C}$. Déterminer $\varphi'(x)$.

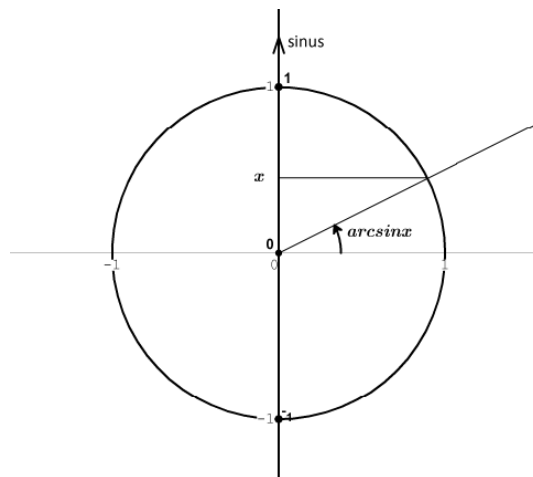
II Trigonométrie

1. Trigonométrie réciproque

Définition 7 • la fonction sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$ dont la fonction réciproque est la fonction arcsinus définie de $[-1, 1]$ vers $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

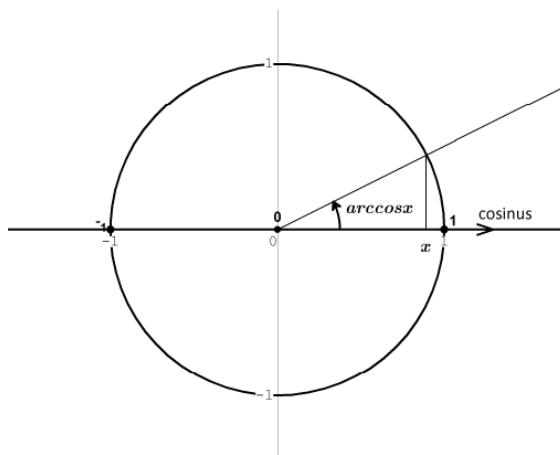
Autrement dit, $\arcsin x$ est l'unique angle de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut x .



• la fonction cosinus réalise une bijection de $[0; \pi]$ vers $[-1, 1]$ dont la fonction réciproque est la fonction arccosinus définie de $[-1, 1]$ vers $[0; \pi]$ par :

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in [0; \pi], y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

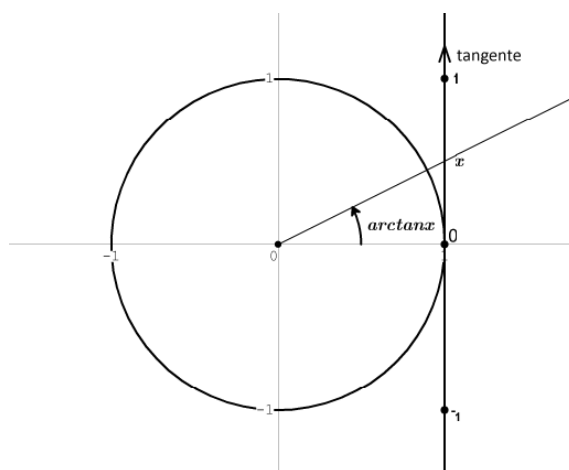
Autrement dit, $\arccos x$ est l'unique angle de $[0; \pi]$ dont le cosinus vaut x .



• la fonction tangente réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers \mathbb{R} dont la fonction réciproque est la fonction arctangente définie de \mathbb{R} vers $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

Autrement dit, $\arctan x$ est l'unique angle de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x .



Exercice 8 Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

1) $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ dans \mathbb{R}

2) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi]$

2. Transformation de $a \cos \theta + b \sin \theta$ où a, b et θ sont réels

On suppose $(a, b) \neq 0$ et on écrit :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta \right)$$

Si on peut, on cherche alors un angle usuel φ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Sinon, on pose $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$

On a alors $a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) = r \cos(\theta - \varphi)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 9 Résoudre l'équation suivante : $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 1$ dans \mathbb{R}

3. Linéarisation d'expression de la forme $\cos^m \theta \sin^n \theta$

Tout produit de la forme $\cos^m \theta \sin^n \theta$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$

En effet : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\cos^m \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^m$ et $\sin^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^n$

Donc $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\cos^m \theta = \frac{1}{2^m} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^m$ et $\sin^n \theta = \frac{1}{(2i)^n} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n$.

On développe $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^m$ et $(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n$ à l'aide de la formule du binôme puis leur produit.

Enfin, on regroupe les termes $e^{ik\theta} \pm e^{-ik\theta}$ pour retrouver $2 \cos(k\theta)$ ou $2i \sin(k\theta)$

Exercice 10 Linéariser les expressions trigonométriques suivantes :

1) $\cos^4 x$

2) $\cos x \sin^3 x$

4. Transformation de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

On utilise la formule de Moivre : $\cos(nx) + i \sin(nx) = (\cos x + i \sin x)^n$.

On développe $(\cos x + i \sin x)^n$ à l'aide de la formule du binôme

puis on identifie les parties réelles ($\cos(nx)$) et imaginaires ($\sin(nx)$).

Exercice 11 Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin \theta$.

De $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

5. Formules trigonométriques

à connaître par coeur :

- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

à savoir retrouver rapidement :

- $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ et $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $A_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

Calculer $A_n(x) + iB_n(x)$. En déduire $A_n(x)$ et $B_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.