

I	<u>Notions fondamentales</u>	Page 2
1.	<u>Intervalles et valeur absolue</u>	
2.	<u>Majorants et minorants</u>	
3.	<u>Borne inférieure et borne supérieure</u>	
II	<u>Composition, injection, surjection et bijection</u>	Page 3
1.	<u>Composition</u>	
2.	<u>Injection, surjection, bijection</u>	
III	<u>Fonctions usuelles</u>	Page 4
1.	<u>Fonctions exponentielles et fonctions logarithmes</u>	
2.	<u>Fonctions puissances</u>	
3.	<u>La fonction arctangente</u>	Page 5
IV	<u>Limites et comparaison des fonctions</u>	Page 6
1.	<u>Notion de voisinage</u>	
2.	<u>Limite en un point</u>	
3.	<u>Fonctions équivalentes</u>	
5.	<u>Comparaison des fonctions usuelles</u>	Page 7
V	<u>Continuité sur un intervalle</u>	
1.	<u>Fonction continue</u>	
2.	<u>continuité et bijection</u>	Page 8
VI	<u>Dérivabilité et fonctions dérivées</u>	
1.	<u>Définition</u>	
2.	<u>Dérivées usuelles</u>	Page 9
3.	<u>Dérivée n-ième et classe de fonction</u>	
4.	<u>Propriétés des fonctions dérivables</u>	Page 10
VII	<u>Développements limités</u>	
1.	<u>Définition et premières propriétés</u>	
2.	<u>Développements limités usuels</u>	Page 11
3.	<u>Opérations sur les développements limités</u>	
4.	<u>Utilisations des développements limités</u>	Page 12
VIII	<u>Étude d'une fonction</u>	

I Notions fondamentales

1. Intervalles et valeur absolue

Définition 1 La fonction valeur absolue est définie sur \mathbb{R} par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Proposition 1 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

$$\bullet \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|.$$

$$\bullet \forall a \in \mathbb{R}, \forall r > 0, |x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$$

$$\bullet \forall a \in \mathbb{R}, \forall r \geq 0, |x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$$

Exercice 1 Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$a) \left| a - \frac{1}{5} \right| = \frac{5}{6}$$

$$b) |b - 3| > \frac{3}{2}$$

$$c) \left| c + \frac{3}{4} \right| \leq \frac{4}{3}$$

Exercice 2 Exprimer les relations suivantes à l'aide d'inégalités et de valeurs absolues :

$$a) a \in] -\frac{16}{5}, \frac{14}{5} [$$

$$b) b \in] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty [$$

$$c) c \in [0, 4]$$

2. Majorants et minorants

Définition 2 Soit A un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} .

• Un réel M est un majorant de A si, et seulement si : $\forall x \in A, x \leq M$.

On dit que A est majorée si, et seulement si, A admet au moins un majorant.

• Un réel m est un minorant de A si, et seulement si : $\forall x \in A, m \leq x$.

On dit que A est minorée si, et seulement si, A admet au moins un minorant.

• A est bornée si, et seulement si, A est à la fois majorée et minorée.

3. Borne inférieure et borne supérieure

Définition 3 Soit A un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} .

• La borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A .

Si elle existe, la borne supérieure de A est unique et on la note $\sup A$

• La borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A .

Si elle existe, la borne inférieure de A est unique et on la note $\inf A$

Exercice 3 Donner, s'ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

$$a) A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$b) B = \left\{ \frac{1}{1 - 2^{-n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$c) C = \left\{ \frac{x^2}{|x^2 - 1|} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \right\}$$

Proposition 2 Théorème de la borne supérieure :

Si A est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} alors A possède une borne supérieure.

Si A est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} alors A possède une borne inférieure.

II Composition, injection, surjection et bijection

1. Composition

Définition 4 Soit f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur D_f et D_g .

Si $\text{Im} f \subset D_g$ (c'est-à-dire $\forall x \in D_f, f(x) \in D_g$) alors la fonction composée de g par f , notée $g \circ f$, est définie par : $\forall x \in D_f, g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque en général, $g \circ f \neq f \circ g$

Exercice 4 Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^2$.

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

2. Injection, surjection, bijection

Définition 5 Soit f une fonction numérique définie sur D_f , I une partie de D_f et J une partie de \mathbb{R} .

• f est une injection ou une fonction injective si, et seulement si :

$$\forall (x, x') \in D_f^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ce qui est équivalent à $\forall (x, x') \in D_f^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

• f est une surjection ou une fonction surjective de I vers J si, et seulement si :

$$\forall y \in J, \exists x \in I / f(x) = y$$

ce qui est équivalent à : $f(I) = J$.

• f est une bijection ou une fonction bijective de I vers J si, et seulement si :

f est à la fois injective et surjective

ce qui est équivalent à : $\forall y \in J, \exists ! x \in I / f(x) = y$.

Définition 6 Soit f une fonction bijective de I vers J .

Alors, $\forall y \in J, \exists ! x \in I / f(x) = y$.

La bijection réciproque de f , notée f^{-1} , est la fonction qui à tout y de J associe l'unique x de I tel que $f(x) = y$.

Ainsi : $\forall x \in I, \forall y \in J, f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Proposition 3 Soit f une fonction définie sur I et J une partie de \mathbb{R} .

f est bijective de I vers J si, et seulement si il existe une fonction g de J dans I telle que :

$$\forall x \in I, g \circ f(x) = x \text{ et } \forall y \in J, f \circ g(y) = y.$$

Dans ce cas, $f^{-1} = g$.

En pratique, Pour montrer que f est bijective de I vers J et trouver f^{-1} , on cherche à montrer que :

$\forall x \in I, \forall y \in J, f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$ alors f est bijective de I vers J et $f^{-1} = g$.

Exercice 5 Soit $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. La fonction f est-elle injective, surjective, bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ?

Sinon, déterminer des intervalles I et J de \mathbb{R} de telle sorte que f définisse une bijection de I vers J .

Déterminer alors sa fonction réciproque.

III Fonctions usuelles

1. Fonctions exponentielles et fonctions logarithmes

Définition 7 • La fonction logarithme népérien est l'unique primitive de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* qui s'annule

$$\text{en } 1 : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante et continue.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc elle est bijective de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .

Sa réciproque est la fonction exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$.

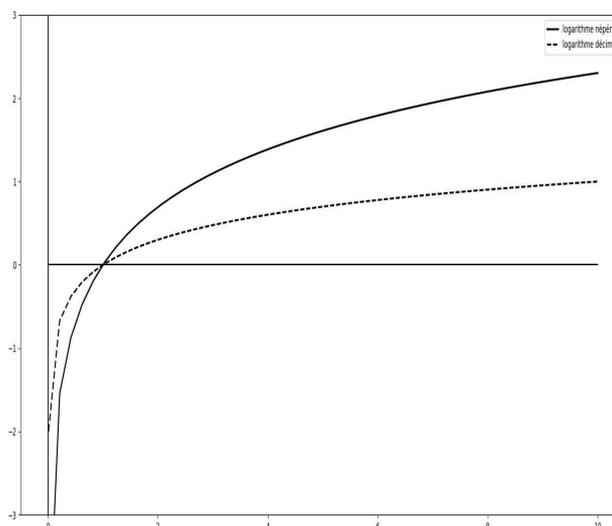
En particulier $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

• La fonction logarithme décimale est définie sur \mathbb{R}_+^* par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

La fonction logarithme décimale est strictement monotone et continue de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R}

Sa réciproque est la fonction exponentielle de base 10 : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$.

En particulier $\log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$



Proposition 4 • $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \ln(xy) = \ln x + \ln y$

$$\bullet \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x e^y$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

2. Fonctions puissances

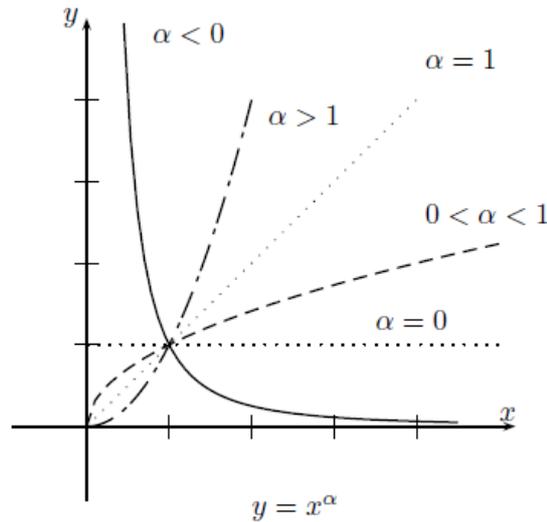
Définition 8 On appelle fonction de puissance α la fonction qui à x associe x^α .

• Si $\alpha = 0$ alors $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1 sur \mathbb{R} .

• Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ alors la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur \mathbb{R} .

• Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ alors en posant $p = -\alpha$, la fonction $x \mapsto x^\alpha = \frac{1}{x^p}$ est définie sur \mathbb{R}^* .

• Dans les autres cas, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$



Définition 9 Si $n > 0$, la fonction racine n -ième est la fonction réciproque de la fonction puissance n .

Autrement dit : $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$.

Elle est définie sur \mathbb{R}^+ si n est pair et sur \mathbb{R} si n est impair.

Sur \mathbb{R}_+^* , elle coïncide avec la fonction puissance $\frac{1}{n}$.

3. La fonction arctangente

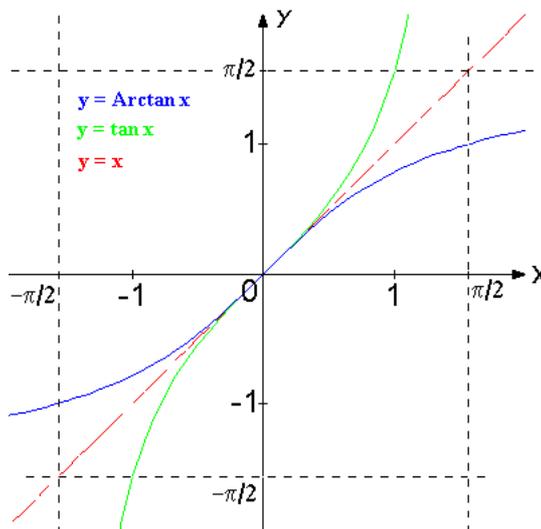
Définition 10 La fonction tangente est continue et strictement croissante de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers \mathbb{R} .

L'application réciproque de cette bijection est appelée fonction arctangente.

Elle est continue et strictement croissante de \mathbb{R} vers $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et notée \arctan .

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

Autrement dit, $\arctan x$ est l'unique angle de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x .



Proposition 5 La fonction arctangente est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'x = \frac{1}{1+x^2}$

Preuve $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x$ donc $\arctan'x(1 + \tan^2(\arctan x)) = 1$. Comme $1 + \tan^2(\arctan x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \arctan'x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$.

IV Limites et comparaison des fonctions

1. Notion de voisinage

Soit f une fonction, \mathcal{D}_f son domaine de définition. Certaines propriétés ont un caractère général et sont vérifiées en tout point de \mathcal{D}_f (ex. la parité). D'autres ont un caractère local et sont vérifiées en un point x_0 de \mathcal{D}_f ou pour des valeurs proches de x_0 , on dit qu'elles sont vérifiées au voisinage de x_0 .

Définition 11 On dit qu'une propriété \mathcal{P} est vérifiée au voisinage d'un point x_0 de \mathbb{R} si elle est vérifiée sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

2. Limite en un point

Définition 12 Soit une fonction numérique f définie sur un voisinage \mathcal{V} de a et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f (|x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow [\forall A \in \mathbf{R}, \exists \alpha > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f (|x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A)]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow [\forall A \in \mathbf{R}, \exists \alpha > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f (|x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A)]$$

Proposition 6 En général, la limite d'une somme (resp. produit, quotient) de deux fonctions est égale à la somme (resp. produit, quotient) des limites de ces deux fonctions.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et si g est bornée au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0$.

Remarque Il y a sept cas de formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 .

Pour 1^∞ , ∞^0 et 0^0 on écrit toujours $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Proposition 7 Le passage à la limite conserve les inégalités larges :

- s'il existe un voisinage de a sur lequel $m \leq f \leq M$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $m \leq \ell \leq M$
en particulier, si f est positive au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\ell \geq 0$
- s'il existe un voisinage de a sur lequel $f \leq g$, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$.
- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et si $m < \ell < M$ alors il existe un voisinage de a sur lequel $m < f < M$
en particulier, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell > 0$ alors il existe un voisinage de a sur lequel $f > 0$.

3. Fonctions équivalentes

Définition 13 Soit f et g deux fonctions définies sur D et α un réel de \bar{D} ($= D \cup \{\text{les bornes de } D\}$) tel que g ne s'annule pas au voisinage de α sauf, éventuellement en α .

f est équivalente à g au voisinage de α si, et seulement si : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f \sim_\alpha g$

Proposition 8 Soit f, g et h trois fonctions numériques définies sur D et x_0 un réel de \bar{D} .

$$\bullet f \sim_\alpha g \Leftrightarrow g \sim_\alpha f$$

$$\bullet f \sim_\alpha g \text{ et } g \sim_\alpha h \Rightarrow f \sim_\alpha h$$

$$\bullet f \sim_\alpha g \Rightarrow fh \sim_\alpha gh$$

$$\bullet \text{ si } r \text{ est un réel } f \sim_\alpha g \Rightarrow f^r \sim_\alpha g^r$$

$$\bullet \text{ si } u \text{ est une fonction telle que } \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = \alpha \text{ alors } f \sim_\alpha g \Rightarrow f \circ u \sim_{t_0} g \circ u$$

Attention On n'a le droit ni de sommer ni de composer des équivalents

Proposition 9 Soit f et g deux fonctions numériques définies sur D , a un réel de D et ℓ un réel.

- si $f \sim_a g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
- $[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \text{ et } \ell \neq 0] \Leftrightarrow f \sim_a \ell$

5. Comparaison des fonctions usuelles

Proposition 10 $\forall a \in \mathbb{R} \quad x^a - 1 \underset{1}{\sim} a(x-1)$ et, en posant $h = x - 1$, $(1+h)^a - 1 \underset{0}{\sim} ah$

- si $P(x) = a_p x^p + \dots + a_1 x + a_0$ alors $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_p x^p$
- $\sin x \underset{0}{\sim} x$ $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ $\tan x \underset{0}{\sim} x$
- $\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$ ou aussi $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
- $\forall a > 0$ et $\beta > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln^\beta x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^a} = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$

Exercice 6 Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes au point indiqué :

- $f(x) = 2x^2 - x - 1$ en 0, en 1 et en $+\infty$.
- $f(x) = \sin(1 - \cos x)$ en 0.

Remarque Erreurs classiques à éviter :

- $f \sim_a g$ n'entraîne pas $f + h \sim_a g + h$
- $f \sim_a g$ n'entraîne pas $f^h \sim_a g^h$ sauf si h est une fonction constante
- $f \sim_a g$ n'entraîne pas $u(f) \sim_a u(g)$

Exercice 7 Étudier les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+4} - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 + 2x - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos 2x}$

Exercice 8 Étudier le domaine de définition et les limites aux bornes des fonctions définies par :

- $f(x) = x^a e^{1/x}$ ($a \in \mathbb{R}$)
- $f(x) = (1 - \ln x)^x$

V Continuité sur un intervalle

1. Fonction continue

Définition 14 Soit f une fonction définie sur un domaine \mathcal{D} et $a \in \mathcal{D}$.

- f est continue en a si, et seulement si, f admet une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- f est continue à droite (resp à gauche) en a si, et seulement si, f admet une limite réelle quand x tend vers a ($x > a$ (resp. $x < a$))
- f est continue sur un intervalle \mathcal{I} si, et seulement si, f est continue en tout point de \mathcal{I} .

Proposition 11 • Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

- la somme, le produit par un réel, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions continues sur \mathcal{I} sont des fonctions continues sur \mathcal{I}
- si f est continue sur \mathcal{I} et g est continue sur $f(\mathcal{I})$ alors $g \circ f$ est continue sur \mathcal{I}

Définition 15 Soit \mathcal{I} un intervalle, $a \in \mathcal{I}$. Soit f une fonction définie sur $\mathcal{I} \setminus \{a\}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Le prolongement par continuité de f en a est la fonction g définie sur \mathcal{I} par :

$$\forall x \in \mathcal{I}, g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{I} \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}.$$

Exercice 9 On pose $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

La fonction f est définie sur \mathbb{R}^* , est-elle prolongable par continuité sur \mathbb{R} ?

2. continuité et bijection

Proposition 12 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle \mathcal{I} et $(a, b) \in \mathcal{I}^2$.

Pour tout réel d compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a, b] / d = f(c)$

En particulier, si $f(a)f(b) \leq 0$ alors f s'annule au moins une fois entre a et b .

Attention Pas d'unicité et donc pas de bijection avec ce théorème

Conséquences • l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

- l'image d'un segment par une fonction continue est un segment (f atteint ses bornes)

Proposition 13 Théorème de la la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle \mathcal{I} .

Alors f définit une bijection de \mathcal{I} vers $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$.

VI Dérivabilité et fonctions dérivées

1. Définition

Définition 16 Soit f une fonction définie sur un intervalle \mathcal{I} de \mathbb{R} et a un réel de \mathcal{I} .

- f est dérivable en a $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

Alors $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

- f est dérivable en a $\Leftrightarrow f$ admet un $DL_1(a)$

$\Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathcal{I}, f(x) = f(a) + \ell(x - a) + o(x - a)$ et dans ce cas, $f'(a) = \ell$

$\Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} \mid \forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } a + h \in \mathcal{I}, f(a + h) = f(a) + \ell h + o(h)$

Proposition 14 Toute fonction dérivable en a est continue en a mais la réciproque est fautive.

Remarque La tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable en a admet pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \text{ (de coefficient directeur } f'(a)\text{)}.$$

Définition 17 Une fonction f est dérivable sur un intervalle \mathcal{I} si, et seulement si, elle est dérivable en tout

point de \mathcal{I} . On peut alors définir la fonction dérivée de f sur \mathcal{I} notée f' ou $\frac{df}{dx}$.

Proposition 15 • Si f et g sont dérivables sur \mathcal{I} alors $f + g$, λf et fg sont dérivables sur \mathcal{I} .

si de plus g ne s'annule pas sur \mathcal{I} alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur \mathcal{I} .

• Si f est dérivable sur \mathcal{I} et g est dérivable sur $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$ alors $g \circ f$ est dérivable sur \mathcal{I} .

De plus : $\forall x \in \mathcal{I}, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

• Si f est bijective de \mathcal{I} sur \mathcal{J} , dérivable sur \mathcal{I} et telle que f' ne s'annule pas sur \mathcal{I} alors f^{-1} est dérivable sur \mathcal{J} . De plus : $\forall y \in \mathcal{J}, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

2. Dérivées usuelles

fonction usuelle	dérivée
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^r, r \in \mathbb{R}$	rx^{r-1}
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

fonction usuelle	dérivée
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Exercice 10 Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$.

Exercice 11 Soit $f(x) = \text{Arctan} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right) \right)$.

Calculer la dérivée de f

En déduire une expression simple de $f(x)$

3. Dérivée n-ième et classe de fonction

Définition 18 Soit f une fonction définie sur I . On définit par récurrence la n-ième fonction dérivée

(ou dérivée d'ordre n) de f notée $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n} : f^{(0)} = f$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k+1)} = f^{(k)'}$

Exercice 12 Soit $f(x) = \ln(1+x)$. Calculer la dérivée n-ième de f .

Proposition 16 • Soit $f(x) = x^p, \forall x \in \mathbb{R}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p(p-1)\cdots(p-n+1)x^{p-n} = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$$

• Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Proposition 17 Si f et g sont n fois dérivables sur \mathcal{I} alors $f + g$ aussi et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

Définition 19 Soit f une fonction définie sur \mathcal{I} .

• $f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) \Leftrightarrow f$ est n fois dérivable sur \mathcal{I} et $f^{(n)}$ est continue sur \mathcal{I}

• $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I}) \Leftrightarrow f$ est indéfiniment dérivable sur \mathcal{I} .

Proposition 18 Soit f une fonction définie sur \mathcal{I} , n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

Alors $f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) \Leftrightarrow f^{(k)} \in \mathcal{C}^{n-k}(\mathcal{I})$

Proposition 19 $\cdot (f, g) \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})^2 \Rightarrow f + g \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$ et $fg \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$.
 $\cdot f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$ et $g \in \mathcal{C}^n(f(\mathcal{I})) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$

Exercice 13 Soit $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ sinon. f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ?

4. Propriétés des fonctions dérivables

Proposition 20 Soit f une fonction définie sur un intervalle \mathcal{I} de \mathbb{R} et dérivable en un point a de \mathcal{I} .
 Si f admet en a un extremum local alors $f'(a) = 0$.

Proposition 21 Théorème de Rolle

Soit a et b réels tels que $a < b$, f une fonction continue $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
 Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[\mid f'(c) = 0$.

Proposition 22 Théorème des accroissements finis

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, f fonction continue sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$) et dérivable sur $]a, b[$ (ou $]b, a[$)
 alors $\exists c \in]a, b[\mid f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Exercice 14 Établir l'encadrement : $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan(\frac{4}{3}) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$.

Remarque En posant $a = 0$ et $b = x$, soit f est une fonction continue et dérivable entre 0 et x .
 si $x > 0$ alors $\exists c \in]0, x[$ et si $x < 0$ alors $\exists c \in]0, x[$
 tel que $f(x) = f(0) + f'(c)x$.

VII Développements limités

1. Définition et premières propriétés

Définition 20 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et a un réel de I ou une borne de I .

Le développement limité de f au voisinage de a , à l'ordre n , noté $DL_n(a)$, est

$$f(x) = P_n(x - a) + o((x - a)^n) \text{ où } P_n \in \mathbb{R}_n[X].$$

On écrit toujours P_n dans l'ordre des puissances croissantes de $(x - a)$.

Remarque Si f est paire et admet un $DL_n(0)$ alors P_n n'a que des termes de degré pair.
 Si f est impaire et admet un $DL_n(0)$ alors P_n n'a que des termes de degré impair.

Proposition 23 Si f admet un $DL_n(0)$ de la forme $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

Soit u telle que $\lim_{t \rightarrow a} u(t) = 0$ et g la fonction définie par : $g(t) = f(u(t))$.

Alors g admet un $DL_n(0)$ donnée par $g(t) = P_n(u(t)) + o((u(t))^n)$.

Proposition 24 Si f admet un $DL_n(0) : f(x) = \sum_{k=p}^n a_k x^k + o(x^n)$ avec $a_p \neq 0$ alors $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.

Proposition 25 Soit f une fonction qui admet une primitive F au voisinage de 0.

Si f admet un $DL_n(0)$ de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$

alors F admet un $DL_{n+1}(0)$ donné par $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$.

2. Développements limités usuels

Proposition 26 Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et n fois dérivable en 0.

Alors f admet un $DL_n(0)$ égal à $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$.

On en déduit les développements limités usuels au voisinage de 0 :

$$\cdot e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\cdot \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\cdot \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\cdot \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\cdot \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\cdot \forall a \in \mathbb{R}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \left((1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \right).$$

Pour calculer les coefficients de ce DL, on écrit que

$$\frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} = \frac{a}{1} \times \frac{a-1}{2} \times \frac{a-2}{3} \times \dots \times \frac{a-(k-1)}{k}$$

3. Opérations sur les développements limités

Proposition 27 Si f et g admettent un $DL_n(0)$:

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

alors $f+g$, λf et fg admettent des $DL_n(0)$ donnés par :

$$\cdot (f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$$

$$\cdot (\lambda f)(x) = (\lambda P_n(x)) + o(x^n)$$

$\cdot (fg)(x) = R_n(x) + o(x^n)$ où $R_n(x)$ est le polynôme obtenu à partir du produit de P_n et Q_n en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Remarque si $f(x) = a_p x^p + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ alors $g(x)$ est multiplié au minimum par $a_p x^p$ donc pour avoir un DL_n de fg , il suffit d'avoir un DL_{n-p} de $g(x)$.

Proposition 28 Si f admet un $DL_n(0)$: $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ dans ce cas $f(0) = a_0$,

si g admet un $DL_n(f(0))$: $g(u) = \sum_{\ell=0}^n b_\ell (u - a_0)^\ell + o((u - a_0)^n)$ alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ et

$$g \circ f(x) = \sum_{\ell=0}^n b_\ell \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k - a_0 \right)^\ell + o(x^n) \text{ (on ne conserve que les termes de degré } \leq n \text{)}.$$

Remarque Le quotient de deux développements limités n'est pas au programme. On se ramène à un produit en posant $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$ et pour le DL de $\frac{1}{g(x)}$, on utilise la composée de g et de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$.

Exercice 15 Déterminer les développements limités suivants :

a) $DL_2(2)$ de $\frac{1}{x}$ b) $DL_2(1)$ de $\ln(1 + \sqrt{x})$ c) $DL_2(+\infty)$ de $\sqrt[3]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$

4. Utilisations des développements limités

i. Étude locale d'une fonction

- Si f admet un $DL_1(a)$ de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o(x - a)$ alors \mathcal{C}_f admet une tangente en $A(a, f(a))$ d'équation $y = a_0 + a_1(x - a)$
- La position relative de \mathcal{C}_f et de sa tangente est donnée par le signe du premier terme non nul du DL de $f(x) - (a_0 + a_1(x - a))$.

ii. Étude au voisinage de l'infini d'une fonction

On effectue le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ et on écrit un DL(0) de $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Si $g(t) = \frac{a}{t} + b + ct^p + o(t^p)$ au voisinage de 0 alors $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ en l'infini.

On en déduit que \mathcal{C}_f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$.

La position relative est donnée par le signe de $\frac{c}{x^p}$.

Exercice 16 En utilisant des développements limités, calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x (e^{2x} + 1 - 2e^x)}$

VIII Étude d'une fonction

Quand on doit étudier une fonction f , il est important de le faire avec méthode :

1) Ensemble de définition

2) Remarques sur d'éventuelles symétrie (parité) et restriction de l'ensemble d'étude

3) Ensemble de continuité et de dérivabilité de la fonction f

4) Étude des limites aux bornes du domaine de définition

5) Étude des variations de f et tableau de variations complet

6) Parfois, on demande la tangente en un point (utilisation d'un DL ou classiquement)

7) Parfois, on demande l'étude des branches infinies :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors \mathcal{C}_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$ alors \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on cherche une éventuelle asymptote oblique à l'aide des développements limités

ou en étudiant $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$: -si $a = \pm\infty$ alors \mathcal{C}_f admet une branche parabolique d'axe (Oy)

-si $a = 0$ alors \mathcal{C}_f admet une branche parabolique d'axe (Ox)

-sinon $a \in \mathbb{R}^*$ et on étudie $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$

si $b = \pm\infty$ alors \mathcal{C}_f admet une direction asymptotique de pente a

sinon $b \in \mathbb{R}$ et \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

8) Allure de la courbe à partir des études précédentes.

a. Exercice 17 Soit $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$. Étudier les branches infinies de f et préciser la position relative de la courbe par rapport à ses asymptotes éventuelles.