DM1 Étude de la fonction sinus hyperbolique

pour jeudi 21 spetembre

On définit la fonction *sinus hyperbolique* sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On définit aussi la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{sh(x)}{x}$$

et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. **a.** Étudier la fonction *sinus hyperbolique* : parité, continuité, dérivabilité, variations.
b. Déterminer un équivalent simple de $sh(x)$ au voisinage de 0.
c. Déterminer un équivalent simple de $sh(x)$ au voisinage de $+\infty$.

2. Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. **a.** Étudier la limite de f en 0. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On notera encore f ce prolongement par continuité.
b. Montrer que f est dérivable en 0.
Préciser l'équation de la demi-tangente à $\mathcal{C}$ en 0 ainsi que sa position par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.

4. **a.** Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}h(x) \text{ où } h \text{ est une fonction à déterminer.}$$

b. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, étudier les variations de h sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
c. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

5. **a.** Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle à déterminer.
b. On en déduit que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
Donner le tableau de variations complet de la fonction f^{-1}.

6. Donner, dans un même repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1}.