Nombres complexes - Trigonométrie

Ce qu'il faut savoir :

Nombres complexes

-lien entre forme algébrique et forme exponentielle
-formule d'Euler
-formule du binôme
-formule de Moivre
-conjugué
-forme canonique d'un trinôme
-relation coefficients-racines d'un trinôme du second degré
-résolution d'une eéquation du second degré

Trigonométrie

-les définitions de $\arccos x$, $\arcsin x$ et $\arctan x$
-simplification de $a\cos x + b\sin x$
-linéarisation et "délinéarisation" des polynômes trigonométriques
-formules de trigonométrie

1. **Comment trouver la forme exponentielle d'un nombre complexe** $z = a + ib$
   -on factorise par $\sqrt{a^2+b^2}$: $z = \sqrt{a^2+b^2}\,(a' + ib')$
   -on reconnaît un angle θ usuel pour lequel $\cos\theta = a'$ et $\sin\theta = b'$ ou on pose $\theta = \arctan\dfrac{b'}{a'}$

2. **Comment montrer qu'un nombre complexe z est un réel**
   a. on montre que $\mathcal{I}m(z) = 0$
   b. on montre que $z = 0$ ou $\arg(z) = 0[\pi]$
   c. on montre que $\bar{z} = z$

3. **Comment déterminer les racines carrées d'un nombre complexe** z
   -on cherche si on peut mettre z sous forme exponentielle
   dans ce cas, $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et les racines carrées de z sont $\pm\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$
   -sinon $z = a + ib$, on pose $\omega = x + iy$ tel que $\omega^2 = z$
   et on résout $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$ avec $\text{signe}(xy) = \text{signe}(b)$

4. **Comment résoudre une équation de la forme** $a\cos x + b\sin x = c$
   -on divise de part et d'autre par $\sqrt{a^2+b^2}$ pour obtenir $a'\cos x + b'\sin x = c'$
   -dans le cas où $c' \notin [-1,1]$, l'équation n'a pas de solution
   -dans le cas où $c' \in [-1,1]$,
   on reconnaît un angle θ usuel pour lequel $\cos\theta = a'$ et $\sin\theta = b'$ ou on pose $\theta = \arctan\dfrac{b'}{a'}$
   -on utilise une formule trigonométrique : $\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x = c' \Leftrightarrow \cos(x-\theta) = c'$
   on conclut avec $x - \theta = \pm\arccos c' + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. **Comment linéariser une expression de la forme** $\cos^m\theta\sin^n\theta$
   -on développe $\cos^m\theta = \dfrac{1}{2^m}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^m$ et $\sin^n\theta = \dfrac{1}{(2i)^n}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n$ (formule du binôme)
   -on développe le produit des deux expressions obtenues
   -on regroupe et remplace les termes de la forme $e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} = 2\cos(k\theta)$ ou $e^{ik\theta} - e^{-ik\theta} = 2i\sin(k\theta)$

6. **Comment transformer** $\cos(mx)$ **en fonction des puissances de** $\cos x$
-on écrit que $\cos(mx) = \mathcal{R}e(e^{imx})$
-on développe $e^{imx} = (\cos x + i \sin x)^m$ avec les coefficients binomiaux usuels
-on pose $\cos(mx)$ égale à la partie réelle de l'expression trouvée
-on remplace les termes de la forme $\sin^{2k} x$ par le développement de $(1 - \cos^2 x)^k$

7. **Comment transformer** $\sin(mx))$ **en fonction des puissances de** $\sin x$
-on écrit que $\sin(mx) = \mathcal{I}m(e^{imx})$
-on développe $e^{imx} = (\cos x + i \sin x)^m$ avec les coefficients binomiaux usuels
-on pose $\sin(mx)$ égale à la partie imaginaire de l'expression trouvée
-on remplace les termes de la forme $\cos^{2k} x$ par le développement de $(1 - \sin^2 x)^k$