Dérivabilité des fonctions numériques

Ce qu'il faut connaître :
-les deux définitions du nombre dérivé de f en un réel a
-les dérivées des fonctions usuelles
-les formules de dérivation de somme, produit par un réel, produit, quotient, composée
-le théorème sur la dérivabilité d'une fonction réciproque
-le théorème de Rolle et le théorème des accroissement finis
-les développements limités usuels

1. Comment montrer que f est dérivable en un réel a

- **a.** on montre que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie ℓ (alors $f'(a)=\ell$)
- **b.** on montre que f admet un $DL_1(a)$ (alors $f'(a)$ est le coefficient de $(x-a)$)
- **c.** on montre que f est dérivable à droite et à gauche de a puis que $f_d'(a)=f_g'(a)$ (alors $=f'(a)$)

2. Comment montrer que f est dérivable sur un intervalle I

- **a.** on décompose f comme somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions dérivables sur I
- **b.** on écrit $f=h\circ g$ où g est dérivable de I sur J et h est dérivable sur J
- **c.** si f est dérivable sur $I\setminus\{a\}$ alors on montre (méthode 1) que f est dérivable aussi en a
- **d.** si f est la réciproque d'une fonction g bijective de J sur I, on montre que g est dérivable sur J et que g' ne s'annule pas sur J, dans ce cas, $f'=\dfrac{1}{g'\circ g^{-1}}$

3. Comment étudier les variations d'une fonction f sur un intervalle I

- **a.** on décompose f comme somme, produit, quotient, composée de fonctions dont on connait le sens de variations sur I
- **b.** on étudie le signe de la dérivée
  en factorisant $f'(x)$
  ou en résolvant l'inéquation $f'(x)>0$ sur I
  ou en étudiant une fonction auxiliaire qui permet de déterminer le signe de $f'(x)$ sur I

4. Quand et comment utiliser le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis

- **a.** pour montrer qu'une fonction s'annule en un point (sans chercher à savoir en quel point)
- **b.** pour démontrer des inégalités ou trouver des encadrements d'expression de la forme $f(x)-f(a)$
- **c.** pour étudier la convergence de suites récurrentes du type $u_{n+1}=f(u_n)$

5. Comment calculer la dérivée n-ième d'une fonction f sur un intervalle I

- **a.** on décompose f comme somme de fonctions dont on connait les dérivées n-ièmes sur I
- **b.** on calcule les premières dérivées, on conjecture la forme de $f^{(n)}$ et on montre par récurrence

6. Comment montrer que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, $k\in\mathbb{N}$

- **a.** on décompose f comme somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- **b.** on écrit $f=h\circ g$ où g est de classe $\mathcal{C}^k$ de I sur J et h est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J
- **c.** on montre que f est k fois dérivable sur I et que $f^{(k)}$ est continue sur I

7. Comment montrer que f est de classe C^∞ sur un intervalle I

- **a.** on décompose f comme somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I
- **b.** on écrit $f = h \circ g$ où g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I sur J et h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J
- **c.** on montre que : $\forall k \in \mathbb{N}$, f est k fois dérivable sur I

8. Comment calculer le développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point a

- **a.** on effectue le changement de variable $x = a + h$ et on utilise les DL_0 usuels aisni que les méthodes sur la somme, le produit, le quotient et la composition des DLs
- **b.** si f' admet un $DL_{n-1}(a)$ alors on obtient le $\mathrm{DL}_n(a)$ par intégration sans oublier la constante $f(a)$
- **c.** on utilise la formule de Taylor-Young
- **d.** pour trouver le DL(0) de $g \circ f(x)$, on écrit le DL(0) de $f(x)$ et le DL($f(0)$) de $g(x)$ en étudiant les ordres de chacun des DL
- **e.** pour trouver le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

  -on détermine l'ordre des DL de $f(x)$ et de $g(x)$:

  on simplifie $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_p x^p + \cdots + a_r x^r + \circ(x^r)}{b_q x^q + \cdots + b_s x^s + \circ(x^s)} = \dfrac{a_p}{b_q} x^{p-q} \dfrac{1 + \cdots + \frac{a_r}{a_p} x^{r-p} + \circ(x^{r-p})}{1 + \cdots + \frac{b_s}{b_q} x^{s-q} + \circ(x^{s-q})}$

  et on pose $r - p = s - q = n - (p - q)$

  -on calcule le DL de $\dfrac{1}{1 + \cdots + \frac{b_s}{b_q} x^{s-q} + \circ(x^{s-q})}$ à l'aide de celui de $\dfrac{1}{1+u}$

  -on effectue le produit

9. Comment et quand utiliser un développement limité

- **a.** pour déterminer un équivalent ou une limite d'une fonction f en un réel a

  le premier terme non nul d'un DL(a) de f fournit un équivalent de $f(x)$ au voisinage de a
- **b.** pour déterminer un équivalent ou une limite d'une fonction f en $\pm\infty$

  on pose $t = \dfrac{1}{x}$ et on cherche un équivalent ou une limite de $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ en 0
- **c.** pour étudier localement une fonction f en un réel a (tangente éventuelle et position relative)

  si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, $n > 1$, de la forme $f(x) = m + p(x-a) + q(x-a)^n + \circ((x-a)^n)$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente $(\mathcal{T})$ en le point $A(a, m)$ d'équation $y = m + p(x-a)$ et la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $(\mathcal{T})$ est donnée au voisinage de a par le signe de $q(x-a)^n$
- **d.** pour étudier une fonction f au voisinage de $\pm\infty$ (éventuelle asymptote et position relative)

  -on effectue le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ dans l'expression de $\dfrac{f(x)}{x}$

  -si $g(t) = t f(\left(\dfrac{1}{t}\right)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, $n > 1$, de la forme $g(t) = m + pt + qt^n + \circ(t^n)$ alors $f(x) = mx + p + \dfrac{q}{x^{n-1}} + \circ\left(\dfrac{1}{x^{n-1}}\right)$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote $(\mathcal{D})$ d'équation $y = mx + p$ et la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $(\mathcal{D})$, au voisinage de $\pm\infty$, est donnée par le signe de $\dfrac{q}{x^{n-1}}$