TD 1 : nombres complexes et trigonométrie

1 Exercices d'application directe du cours

1 Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{3+6i}{3-4i}$
2. $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$
3. $z_3 = \dfrac{1}{1+i}$
4. $z_4 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$
5. $z_5 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

2 Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $z_1 = -2$
2. $z_2 = 3$
3. $z_3 = 4 + 4i$
4. $z_4 = \sqrt{3} - i$
5. $z_4 = -\dfrac{4}{3}i$
6. $z_5 = \cos\alpha \times e^{i\theta}, \quad \alpha \in]-\pi, \pi], \ \theta \in \mathbb{R}$

3 Soit $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

1. Déterminer la forme exponentielle de a, b et ab.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

4 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $z = (1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n$. Mettre z sous forme exponentielle.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0.$$

6 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $S_4 = \cos^4\theta - \sin^4\theta$ et $S_3 = \cos^3\theta - \sin^3\theta$.

7 Développer $\cos 5t$ en fonction de $\cos t$.

2 Exercices classiques

8 Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Mettre j sous forme exponentielle.
2. Calculer j^2 et j^3, puis $1 + j + j^2$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+j)^{2n+1} = -j^{n+2}$.

9 Soit z_1 et z_2 deux complexes de module 1. Montrer que $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est réel. Que dire de $Z' = \dfrac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2}$?

10

1. Soit u et v sont deux nombres complexes. Montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$.
2. Soit $u \in \mathbb{C}$ avec $u \neq -i$. Montrer l'équivalence :

$$\left|\frac{1+iu}{1-iu}\right| = 1 \iff u \in \mathbb{R}.$$

11

1. Calculer les arguments de $z = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$.
2. Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2]$. Calculer les arguments des nombres suivants :

$$z_+ = 1 + e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z_- = 1 - e^{i\theta}.$$

12 **Racines n-èmes de l'unité.**
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer les solutions de l'équation $z^n = 1$.
2. Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et le produit $P = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

13
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^3}$.
   Indication : on commencera par mettre le second membre de l'équation sous forme exponentielle, puis on cherchera les solutions sous forme exponentielle également.

14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - 2z^2 \cos 2a + 1 = 0,$$

où a est un réel donné.

3 Autres exercices

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}.$$

15
1. Soit $a \in]-\pi/2, \pi/2[$. Exprimer $\tan a$ en fonction de $\tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$.
2. Déterminer la valeur exacte de $\tan \dfrac{\pi}{8}$.
3. Résoudre l'équation : $(\sqrt{2}-1)\cos x + \sin x = -1$.

16
1. Soit u un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta \in]-\pi, \pi]$.
   Déterminer $|1+u|$, $|1-u|$, $\arg(1+u)$ et $\arg(1-u)$.
2. Soit n un entier naturel. Simplifier les nombres complexes suivants :
   (a) $(1 + \cos\theta + i \sin\theta)^n$,
   (b) $\left(\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n$, où $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

17 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.

1. Montrer que S_n est un réel.
2. Développer S_n.
3. Donner la forme exponentielle de S_n.
4. En déduire une expression simple de :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$$