TD2 : Fonctions

1 Limites - équivalents

$\boxed{1}$ Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes au point a indiqué puis étudier l'existence d'une limite en ce point :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{\tan x}, \quad a = 0.$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{(\pi - x)^2}, \quad a = \pi/4.$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+2x-3}, \ a \in \{1, 2, +\infty\}.$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2} \ a = +\infty.$
5. $f_5 : x \mapsto \sin(1-\cos x), \quad a = 0.$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{e^x}, \quad a = +\infty.$

2 Prolongement par continuité

$\boxed{2}$ Soit f la fonction définie sur $[-4, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2} & \text{si } x \neq 0 \\ 8 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f.

3 Dérivabilité

$\boxed{3}$ Déterminer l'ensemble de définition et étudier la dérivabilité de la fonction définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

$\boxed{4}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \longmapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à déterminer.
2. Donner les propriétés de f^{-1} et montrer que f^{-1} est dérivable sur I.
3. Calculer $(f^{-1})'(1)$.

$\boxed{5}$ On considère la fonction ch définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

1. Montrer que la fonction ch est bijective et dérivable sur son domaine de définition.
2. Étudier la dérivabilité de sa bijection réciproque.

4 Développements limités

$\boxed{6}$ Donner un $\mathrm{DL}_2(0)$ de : $f_1(x) = \ln(1 + \sin(3x))$.

$\boxed{7}$ Donner un $\mathrm{DL}_2(0)$ de : $f_2(x) = \sqrt[3]{1+x} - \cos(2x)$.

$\boxed{8}$ Donner un $\mathrm{DL}_1(0)$ de : $f_3(x) = \dfrac{\ln(1+\sin(3x))}{\sqrt[3]{1+x} - \cos(2x)}.$

5 Études complètes

$\boxed{9}$ Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

1. Étude générale : dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f_n.
   (b) La fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 1.
   (c) Déterminer, selon la parité de n, si la fonction f_n est prolongeable par continuité en -1.
   (d) Déterminer, selon les valeurs de n, la limite de f_n en $+\infty$.
   (e) Déterminer, selon les valeurs de n, la limite de f_n en $-\infty$.
   (f) Sur quel ensemble peut-on garantir la dérivabilité de f_n ? Déterminer f_n' sur cet ensemble.
2. Étude de f_1.
   (a) Vérifier que f_1 définit une bijection de $[1, +\infty[$ vers un ensemble I_1 à préciser, et une bijection de $]-\infty, -1[$ vers un ensemble I_2 à préciser.
   (b) Préciser, en fonction du réel a, le nombre de solutions de l'équation $f_1(x) = a$.
   (c) Déterminer la bijection réciproque de f_1 sur $[1, +\infty[$.