

Semaine 2  
du lundi 25 au vendredi 29 septembre 2023

## Nombres complexes

Écriture algébrique d'un nombre complexe  
Partie réelle et imaginaire  
Propriétés élémentaires de Re et Im  
Représentation géométrique d'un nombre complexe  
Affixe d'un point, d'un vecteur  
Interprétation géométrique de la somme de deux nombres complexes  
Conjugué d'un nombre complexe, interprétation géométrique  
Propriétés de la conjugaison  
Module d'un nombre complexe, interprétation géométrique  
Propriétés du module : multiplicativité, inégalité triangulaire  
Notation  $e^{i\theta}$ . Propriétés  $|e^{i\theta}| = 1$ ,  $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ ,  $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ ,  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ , formules d'Euler  
Arguments d'un nombre complexe non nul  
Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul  
Résolution des équations du second degré à coefficients réels  
Somme et produit des racines

## Trigonométrie

Définition de  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  et  $\tan \theta$   
Périodicité et symétrie  
Formules de trigonométrie  
Résolution d'équations trigonométriques simples :  $\cos x = c$ ,  $\sin x = c$ ,  $\tan x = c$   
Notations arccos, arcsin, arctan  
Transformation de  $a \cos \theta + b \sin \theta$  en  $r \cos(\theta + \varphi)$   
Résolution de  $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$   
Linéarisation de  $\cos^p \theta \sin^q \theta$

## Fonctions usuelles

Parité, périodicité  
Fonctions majorées, minorées, bornées. Monotonie  
Opérations algébriques  
Fonctions puissances d'exposant entier (dans  $\mathbb{Z}$ ), polynômes  
Fonction racine carrée  
Fonction exponentielle et logarithme népérien (ln)  
Notation  $a^b$   
Fonction exponentielles :  $x \mapsto a^x$  avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$   
Fonction logarithme décimal (log)  
Fonctions puissances :  $x \mapsto x^a$  avec  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$   
Fonctions circulaires sin, cos, tan  
Fonctions partie entière  $\lfloor \cdot \rfloor$  et valeurs absolue  $|\cdot|$   
Définition, monotonie et représentation graphique des fonctions  $\sqrt{\cdot}$   
Définition, monotonie et représentation graphique de la fonction arctan

## Limites, continuité

Limite d'une fonction en un point, limite à droite, limite à gauche, limite en  $+\infty$  ou  $-\infty$   
Si  $(u_n)$  tend vers  $a$  et si la limite de  $f$  en  $a$  est  $b$  alors la suite  $(f(u_n))$  tend vers  $b$   
Opérations sur les limites, limite de fonctions composées  
Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités :

- signe d'une fonction de limite non nulle
- passage à la limite dans une inégalité large
- Théorème dit « des gendarmes » et extension aux limites infinies

Théorème de la limite monotone

Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes

Fonctions équivalentes, notation  $f \sim g$

L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante

Utilisation des équivalents pour la recherche de limites

Continuité en un point, continuité à droite et à gauche

Opérations, composition

Prolongement par continuité

Continuité sur un intervalle

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème de la bijection continue :

une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$  et sa réciproque est continue et strictement monotone sur  $f(I)$

## Dérivées

Dérivée en un point, dérivée à gauche, dérivée à droite, fonction dérivée, notation  $f'$  et  $\frac{df}{dx}$

Interprétation graphique, équation de la tangente à une courbe d'équation  $y = f(x)$

Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonction composée

Dérivation d'une fonction réciproque

Théorème de Rolle, formule des accroissements finis

Caractérisations des fonctions croissantes (au sens large) par la positivité de leur dérivée, cas des fonctions constantes, cas des fonctions strictement croissantes

Recherche d'extremums

Fonctions de classe  $C^n$ , de classe  $C^\infty$

Le produit et la composée de deux fonctions de classe  $C^n$  sont de classe  $C^n$

Définition de la notation  $o(x^n)$  pour désigner des fonctions négligeables devant la fonction  $x \mapsto x^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  au voisinage de 0 ou de l'infini

Définition des développements limités en 0

Unicité des coefficients d'un développement limité

Opération sur les développements limités : somme, produit

Primitivation d'un développement limité

Formule de Taylor-Young : existence d'un développement limité à l'ordre  $n$  pour une fonction de classe  $C^n$

Développements limités usuels au voisinage de 0 :  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Exemples de démarches de résolutions approchées d'équations de la forme  $f(x) = 0$ ,  $f$  étant une fonction de classe  $C^1$  au moins sur un intervalle de  $\mathbb{R}$

## Questions de cours

Définition du module d'un nombre complexe.

Allure de la représentation graphique de la fonction arctan en précisant ses asymptotes en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

Si  $a$  est un réel fixé, rappeler les solutions de l'équation  $\cos x = \cos a$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Lien entre forme algébrique et forme exponentielle d'un nombre complexe

Formules trigonométriques  $\cos(a+b)$ ,  $\sin(a+b)$ ,  $\cos(2a)$ ,  $\sin(2a)$

Définition de  $\arccos x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arctan x$

Allure de la représentation graphique de la fonction arctan en précisant ses asymptotes en  $-\infty$  et  $+\infty$

Allure des représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme népérien

Donner le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Énoncer le théorème de Rolle

Définition d'une application  $f : E \rightarrow F$  surjective

Développement limité de  $\sin x$  à l'ordre 5 au voisinage de 0

Définition de la dérivée d'une fonction  $f$  en un point  $a$

Rappeler la formule des accroissements finis

Donner la définition de la partie entière d'un réel

Développement limité à l'ordre 4 de  $\ln(1 + x)$  au voisinage de 0

Donner la formule de Taylor-Young