Corrigé DM1

1. **a.** La fonction *sinus hyperbolique* définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, est $\boxed{\text{continue et dérivable sur } \mathbb{R}}$ car la fonction exponentielle l'est sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\,sh(x)$ donc $\boxed{\text{la fonction } sh \text{ est impaire}}$.

Enfin, $\forall x \in \mathbb{R},\ sh'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ donc $\boxed{\text{la fonction } sh \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

b. On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R},\ sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{-x}}{2}(e^{2x} - 1)$.

On sait que $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $e^{2x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et, comme $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1,\ sh(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}2x$.

Finalement $\boxed{sh(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$.

c. Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0,\ \boxed{sh(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}}$.

2. Grâce à l'équivalent trouvé en **1c.**, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} = +\infty}$ par croissance comparée.

3. **a.** De la même manière, en utlisant l'équivalent trouvé en **1b.**, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1}$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$.

On définit alors ce prolongement en posant : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$.

b. On effectue un $\mathrm{DL}_2(0)$ de f : $\forall x > 0$,

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{2x}$$

$$= \frac{2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{2x} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Comme f est continue en 0, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } f'(0) = 0}$.

On en déduit que $\boxed{\mathcal{C} \text{ admet une demi-tangente en } 0 \text{ d'équation } y = 1}$

et, comme $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{6} \geqslant 0$, $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C} \text{ est au dessus de sa demi-tangente en } 0}$.

4. **a.** $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$ donc

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{(e^x + e^{-x})x - (e^x - e^{-x})}{x^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}\left(x - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right).$$

$\boxed{\text{En posant } h(x) = x - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{ on a bien } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x^2}h(x)}$.

b. Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^x + e^{-x} > 0$, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$ comme quotient de fonctions, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = 1 - \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x) > 0$, que $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$.

Enfin, comme $h(0) = 0$, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h(x) > 0}$.

c. D'après **a.**, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x^2} h(x)$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2x^2} > 0$ et, d'après ci-dessus, $h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) > 0$.

On en conclut que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$.

5. **a.** D'après les questions **2.**, **3a**. et **4c**., la fonction f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ vers $[1, +\infty[$.

Le théorème de la bijection permet de conclure que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ vers } [1, +\infty[}$.

b. On sait que f^{-1} admet le même sens de variations que f.

On en déduit le tableau de variations de f^{-1} :

x	1	$+\infty$
f^{-1}	0 $\nearrow$	$+\infty$

6. La courbe représentative de f^{-1} s'obtient par symétriqe de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
On utilise tous les éléments précédents pour représenter la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe représentative de f^{-1}