DM2	Fonction définie par une intégrale

pour jeudi 12 octobre

On définit la fonction f par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^1 \frac{\cos t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Écrire une fonction Python d'argument x qui permet de calculer une valeur approchée de $f(x)$.
On utilisera la méthode des rectangles.

b. Représenter sous Python la courbe de la fonction f sur l'intervalle $]0, 10]$.
En déduire des conjectures sur la fonction f (variations, limites).

2. Étude des variations de f :
Soit x et x' deux nombres réels tels que $0 \leqslant x \leqslant x'$.
Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$.
En déduire la monotonie de la fonction f.

3. **a.** Montrer que : $\forall x > 0,\ (\cos 1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

b. En déduire les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 par valeurs positives.

4. On considère la fonction g définie par : $\forall x > 0,\ g(x) = \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

a. On admet l'inégalité : $\forall t \in [0, 1],\ |\cos t - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}$.
Montrer que la fonction g est bornée.

b. En déduire que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$ et retrouver le résultat de la question **4b**.

5. Étude de la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$:

a. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que : $\forall x \in [\frac{a}{2}, +\infty[,\ |f(x) - f(a)| \leqslant 2\frac{|x-a|}{a^2}$

b. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.