

Ce qu'il faut connaître :

- Les primitives usuelles et les méthodes de détermination de primitives
- Le principe de superposition
- La structure de l'ensemble des solutions (somme d'une solution de (H) et d'une solution particulière)
- La résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène (H_1)
- La méthode de la variation de la constante pour la recherche d'une solution particulière
- La résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants homogène (H_2)
- La forme d'une solution particulière selon la forme du second membre

Équations différentielles linéaires du premier ordre

- 1. Comment résoudre une équation (H) de la forme : $y' + a(t)y = 0$ sur un intervalle I**
 - a.** Si a est constante, on conclut directement : les solutions sont les fonctions : $t \mapsto Ce^{-at}$, $C \in \mathbb{R}$
 - b.** -On vérifie que a est une fonction continue sur I
 -On détermine une primitive A de a sur I
 -On conclut : les solutions sont les fonctions : $t \mapsto Ce^{-A(t)}$, $C \in \mathbb{R}$
 ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto Ce^{-A(t)}, C \in \mathbb{R}\}$

- 2. Comment résoudre une équation (E) de la forme : $y' + a(t)y = f(t)$ sur un intervalle I**
 - On résout l'équation homogène associée (H) : $y' + a(t)y = 0$ (cf 1.)
 - On vérifie que b est une fonction continue sur I
 - On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E) de la manière suivante :
 - a.** On observe bien l'équation au cas où il y aurait une solution particulière évidente
 - b.** On utilise celle qui aurait été proposée dans une question précédente (solution polynomiale etc.)
 - c.** Sinon, on utilise la méthode de variation de la constante : on la cherche sous la forme $y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$ où C est une fonction dérivable sur I que l'on détermine en y_p et y_p' dans (E)
 - d.** Si $f(t) = \sum f_i(t)$ alors on cherche une solution particulière y_{p_i} de $y' + a(t)y = f_i(t)$
 Une solution particulière de (E) est $y_p = \sum y_{p_i}$ (principe de superposition)
 - On conclut : les solutions sont les fonctions : $t \mapsto y_p(t) + Ce^{-A(t)}$, $C \in \mathbb{R}$
 ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto Ce^{-A(t)}, C \in \mathbb{R}\}$

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

- 3. Comment résoudre une équation (H) de la forme : $ay'' + by' + cy = 0$ sur \mathbb{R} où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$**
 - Si a dépend d'un paramètre, il faut distinguer les cas éventuels ou $a = 0$ (cf 1a.)
 - On vérifie que $a \neq 0$ et on résout l'équation caractéristique (C) : $ax^2 + bx + c = 0$
 - On conclut selon les cas :
 - Si $b^2 - 4ac > 0$, (C) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2
 les solutions de (H) sont les fonctions : $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
 ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
 - Si $b^2 - 4ac = 0$, (C) admet une unique racine réelle r_0
 les solutions de (H) sont les fonctions : $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
 ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
 - Si $b^2 - 4ac < 0$, (C) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$
 les solutions de (H) sont les fonctions : $t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
 ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

4. Comment résoudre une équation (E) de la forme : $ay'' + by' + cy = f(t)$ sur \mathbb{R}

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et f est une fonction sur \mathbb{R}

-On cherche les solutions y_H de l'équation homogène associée (H) : $ay'' + by' + cy = 0$ (cf 3.)

-On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E)

a. On observe bien l'équation au cas où il y aurait une solution particulière évidente

b. On utilise celle qui aurait été proposée dans une question précédente

c. Si $f(t) = P(t)e^{mt}$, on cherche y_p sous la forme

$y_p(t) = t^\alpha Q(t)e^{mt}$ où α est la multiplicité de m dans l'équation caractéristique (C)

et Q est un polynôme de même degré que P dont on détermine les coefficients par identification

d. Si $f(t) = e^{mt} \cos(pt) = \operatorname{Re}(e^{(m+ip)t})$ (resp. $e^{mt} \sin(pt) = \operatorname{Im}(e^{(m+ip)t})$)

On cherche une solution particulière z_p de l'équation $ay'' + by' + cy = e^{(m+ip)t}$ (à valeurs dans \mathbb{C})

Une solution particulière de (E) est $y_p = \operatorname{Re}(z_p)$ (resp. $y_p = \operatorname{Im}(z_p)$)

e. Si $f(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ où A, B et ω sont des constantes réelles

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = t^\alpha (\lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t))$

où α est la multiplicité de $i\omega$ dans l'équation (C), λ et μ sont des constantes réelles à déterminer

f. Si $f(t) = \sum f_i(t)$ où les f_i sont de l'une des formes précédentes

alors on cherche une solution particulière y_{p_i} de $ay'' + by' + cy = f_i(t)$

Une solution particulière de (E) est $y_p = \sum y_{p_i}$ (principe de superposition)

-On conclut : les solutions sont les fonctions : $t \mapsto y_p(t) + y_H(t)$

Dans les autres cas

5. Que faire quand on nous propose un changement de fonction $z = \varphi(y)$

dans une équation différentielle (E) de fonction inconnue y de la variable t

-On justifie que φ est bijective puis on détermine $y = \varphi^{-1}(z)$

-On détermine les dérivées successives de y en fonction de celles de z

-En remplaçant les dérivées de y dans (E), on détermine l'équation (E')

telle que : y est solution de (E) $\Leftrightarrow z$ est solution de (E')

(E') doit être une équation que l'on sait résoudre

-On détermine les fonctions z solutions de l'équation (E')

-On conclut en calculant $y = \varphi^{-1}(z)$

6. Que faire quand on nous propose un changement de variable $t = \varphi(x)$

dans une équation différentielle (E) de fonction inconnue y de la variable t

-On pose le changement de fonction inconnue $z(x) = y(\varphi(x))$

-En dérivant la composée $y \circ \varphi$, on détermine les dérivées $y'(t), y''(t)$ en fonction de $z(x), z'(x), z''(x)$

-En remplaçant $y(t), y'(t)$ et $y''(t)$ dans (E), on détermine l'équation (E')

telle que : y est solution de (E) $\Leftrightarrow z$ est solution de (E')

(E') de fonction inconnue z de la variable x doit être une équation que l'on sait résoudre

-On détermine les fonctions z solutions de l'équation (E')

-On conclut en calculant $y(t) = z(\varphi^{-1}(t))$