

Semaine 3  
du lundi 2 au vendredi 6 octobre 2023

### Fonctions usuelles

Parité, périodicité

Fonctions majorées, minorées, bornées. Monotonie

Opérations algébriques

Fonctions puissances d'exposant entier (dans  $\mathbb{Z}$ ), polynômes

Fonction racine carrée

Fonction exponentielle et logarithme népérien (ln)

Notation  $a^b$

Fonction exponentielles :  $x \mapsto a^x$  avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$

Fonction logarithme décimal (log)

Fonctions puissances :  $x \mapsto x^a$  avec  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Fonctions circulaires sin, cos, tan

Fonctions partie entière  $\lfloor \cdot \rfloor$  et valeurs absolue  $|\cdot|$

Définition, monotonie et représentation graphique des fonctions  $\sqrt{\cdot}$

Définition, monotonie et représentation graphique de la fonction arctan

### Limites, continuité

Limite d'une fonction en un point, limite à droite, limite à gauche, limite en  $+\infty$  ou  $-\infty$

Si  $(u_n)$  tend vers  $a$  et si la limite de  $f$  en  $a$  est  $b$  alors la suite  $(f(u_n))$  tend vers  $b$

Opérations sur les limites, limite de fonctions composées

Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités :

- signe d'une fonction de limite non nulle
- passage à la limite dans une inégalité large
- Théorème dit « des gendarmes » et extension aux limites infinies

Théorème de la limite monotone

Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes

Fonctions équivalentes, notation  $f \sim g$

L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante

Utilisation des équivalents pour la recherche de limites

Continuité en un point, continuité à droite et à gauche

Opérations, composition

Prolongement par continuité

Continuité sur un intervalle

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème de la bijection continue :

une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$  et sa réciproque est continue et strictement monotone sur  $f(I)$

### Dérivées

Dérivée en un point, dérivée à gauche, dérivée à droite, fonction dérivée, notation  $f'$  et  $\frac{df}{dx}$

Interprétation graphique, équation de la tangente à une courbe d'équation  $y = f(x)$

Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonction composée

Dérivation d'une fonction réciproque

Théorème de Rolle, formule des accroissements finis

Caractérisations des fonctions croissantes (au sens large) par la positivité de leur dérivée, cas des fonctions constantes, cas des fonctions strictement croissantes

Recherche d'extremums

Fonctions de classe  $C^n$ , de classe  $C^\infty$

Le produit et la composée de deux fonctions de classe  $C^n$  sont de classe  $C^n$

Définition de la notation  $o(x^n)$  pour désigner des fonctions négligeables devant la fonction  $x \mapsto x^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  au voisinage de 0 ou de l'infini

Définition des développements limités en 0

Unicité des coefficients d'un développement limité

Opération sur les développements limités : somme, produit

Primitivation d'un développement limité

Formule de Taylor-Young : existence d'un développement limité à l'ordre  $n$  pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$

Développements limités usuels au voisinage de 0 :  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Exemples de démarches de résolutions approchées d'équations de la forme  $f(x) = 0$ ,  $f$  étant une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  au moins sur un intervalle de  $\mathbb{R}$

## Intégration

**Primitives** d'une fonction continue sur un intervalle

Si  $f$  est continue sur  $\mathcal{I}$  et  $a \in \mathcal{I}$  alors  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  s'annulant en  $a$

Primitivation par parties

**Intégrale** d'une fonction continue sur un segment

Lien avec la notion d'aire pour une fonction positive

Propriétés de l'intégrale :

linéarité

relation de Chasles

positivité

encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction

si  $a < b$  alors  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Sommes de Riemann sur  $[0, 1]$  :  $\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

Intégration par parties (sauf dans les cas simples, la nécessité de l'IPP est indiquée)

Changement de variables (sauf dans les cas simples, il est donné)

## Questions de cours

Allure de la représentation graphique de la fonction arctan en précisant ses asymptotes en  $-\infty$  et  $+\infty$

Allure des représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme népérien

Donner le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Énoncer le théorème de Rolle

Définition d'une application  $f : E \rightarrow F$  surjective

Développement limité de  $\sin x$  à l'ordre 5 au voisinage de 0

Définition de la dérivée d'une fonction  $f$  en un point  $a$

Rappeler la formule des accroissements finis

Donner la définition de la partie entière d'un réel

Développement limité à l'ordre 4 de  $\ln(1+x)$  au voisinage de 0

Donner la formule de Taylor-Young

Interprétation en termes d'aire de l'intégrale d'une fonction

Primitives de  $x^r$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $\frac{1}{x^2 + 1}$

Formule d'intégration par parties

Formule de changement de variable dans une intégrale sur un segment

Méthode de primitivation de  $\sin^p x \cos^q x$ ,  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

Théorème de la moyenne (convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale sur  $[0, 1]$ )