TD3 : Intégrales - Équations différentielles

1 Calculs d'intégrales

1

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$, *poser* $u=e^x$ *et trouver deux réels* a,b *tels que* $\dfrac{u-1}{u(u+1)}=\dfrac{a}{u}+\dfrac{b}{u+1}$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\,dt$, *inspirez-vous du précédent*
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx$, *intégration par parties*
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin(3x)\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, *trinôme sous forme canonique*
7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, *poser* $x=\cos t$

2 **Intégrales de Wallis**

On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\,dx.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge.
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$.
4. Vérifier que la suite $(n\,I_n\,I_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante.
5. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

2 Fonctions définies par une intégrale

3 Soit F la fonction définie par :

$$x\mapsto \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t^4+t^2+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Étudier la parité de F.
3. Construire le tableau de variations de F.
4. (a) Montrer que pour tout réel t non nul,

$$0\leqslant \frac{1}{1+t+t^2}\leqslant \frac{1}{t^2}.$$

   (b) Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition de F.
5. Calculer $F'(0)$ et tracer la courbe représentative de F.

4 Pour $t\in\mathbb{R}^*$, on pose $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$ et pour x réel, on pose :

$$F(x)=\int_x^{3x} f(t)\,dt.$$

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Étudier les variations de la fonction F.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.
3. On pose $g(t)=\frac{e^t-1}{t}$ pour $t\in\mathbb{R}^*$.
   Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
4. En écrivant que $f(t)=(f(t)-g(t))+g(t)$, montrer que F se prolonge par continuité en 0.

3 Équations différentielles

$\boxed{5}$ Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation :

$$y' \cos^3 x = -2y \sin x$$

$\boxed{6}$ Résoudre l'équation différentielle suivante sur les intervalles $I =]-\infty, -1[$, $J =]-1, 1[$ et $K =]1, +\infty[$:

$$(1 - x^2)\, y' - 2y + x + 1 = 0$$

$\boxed{7}$ Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$x\, y' + y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

$\boxed{8}$ Résoudre $\mathbb{R}$ les équations suivantes, et dans chaque cas déterminer dans chacun des cas la solution vérifiant de plus $y(0) = y'(0) = 0$:

1. $y'' - 3\, y' + 2\, y = -x - 1$
2. $y'' - 2y' + 5y = 3 + \sin(2x)$
3. $y'' - 4\, y' + 4\, y = 3xe^{2x}$ (on cherchera une solution particulière de la forme $x \mapsto \alpha x^3 + \beta x^2$).
4. $y'' + y = \sin^3 x$

$\boxed{9}$ On considère l'équation :

$$x^2 y'' - 2y = \frac{1}{x} + \ln x$$

Utiliser le changement de variable $x = e^t$ pour résoudre l'équation.

$\boxed{10}$ On considère l'équation suivante :

$$x^2\, y'' + 4x\, y' + 2\, y = 1$$

Faire le changement de fonction $z = x^2\, y$ pour résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{11}$ On considère l'équation :

$$(x - 1)\, y'' - y' - x\, y = 0 \quad (E)$$

1. Chercher une solution particulière sous la forme $f(x) = e^{ax}$.
2. En faisant le changement de fonction inconnue $y = f \times z$, déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $]1; +\infty[$.

$\boxed{12}$ Soient a et b deux réels.

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y'' - 4y = ax + b \;\; (E_1).$$
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = a\,|x| + b \;\; (E_2)$.