Table des matières


```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Le point de départ de ce qui suit est la formule suivante. Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, $n \in \mathbf{N}^\star$, et pour $k = 0, \dots, n-1$, on pose : $x_k = a + kh \quad$ où $h = \dfrac{b-a}{n}$, alors pour toute primitive F de f sur $[a,b]$:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} F(x_{k+1}) - F(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_{x_k}^{x_k+h} f(t)\mathrm{d}t}_{I_k}.$$

I Méthode des rectangles

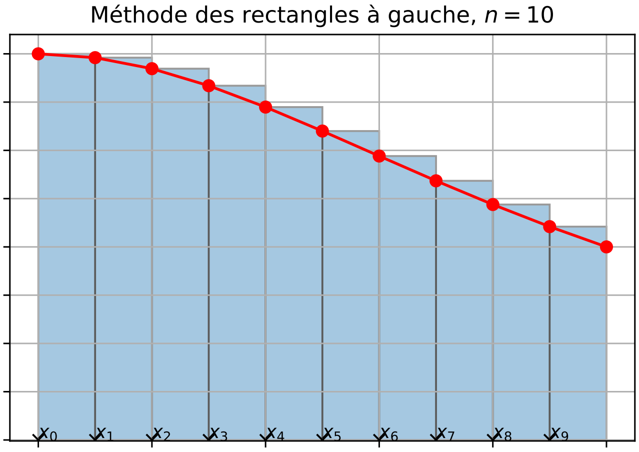
La méthode des rectangles repose sur l'interprétation géométrique de l'intégrale. Il y a plusieurs méthodes des rectangles, notamment :

1. La méthode des rectangles, qui **à gauche** consiste à approximer I_k en :
$$I_k \simeq R_G \quad R_G = f(x_k)h$$
2. la méthode des rectangles, qui **à droite** consiste à approximer I_k en :
$$I_k \simeq R_D \quad R_D = f(x_{k+1})h$$
3. Enfin, citons la méthode des **trapèzes**, qui consiste à faire une approximation moyenne à partir des méthodes précédentes en partant de l'approximation :

Demander en quoi consiste l'approximation dans la méthode des rectangles (f constante sur [xk,xk+1])

$$I_k \simeq \frac{R_G + R_D}{2}$$

Méthode des rectangles à gauche, $n = 10$



[Q1.] Dessiner sur un schéma semblable au précédent ce que donneraient les méthodes précédentes sur seulement un intervalle $[x_K, x_{k+1}]$.

[Q2.] Programmer une fonction `Riemann(f,a,b,n)` qui prend en entrée une fonction f, les extrémités a, b d'un segment, un entier n et renvoie une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par la méthode des rectangles à gauche.

[Q3.] Il est fréquent que la méthode des rectangles soit définie non par par le nombre de points n du segment d'intégration $[a, b]$, mais plutôt par son pas $h > 0$ (qui n'est donc plus donné en termes de a, b). Programmer une fonction `RG(f,a,b,h)` qui donne une valeur appochée de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par la méthode des rectangles à gauche avec un pas $h > 0$ spécifé en entrée. On pourra penser à utiliser la commande `np.arange`.

[Q4.] Programmer de même une fonction `RD(f,a,b,h)` qui donne une valeur appochée de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par la méthode des rectangles à droite.

[Q5.] Tester la fonction `Riemann` pour la fonction $g : x \mapsto \dfrac{4}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ pour $n = 10^k$ $(1 \leq k \leq 6)$. Que dire de la vitesse de convergence ?

[Q6.] Comparer les valeurs obtenues par les fonctions `RG` et `RD` pour différentes valeurs de $h = 10^{-p}$, $p = 1, 2, \ldots 6$ sur la fonction G.

[Q7.] On considère la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}\mathrm{d}t.$$

Tracer la courbe de cette fonction sur $[-10, 10]$.

[Q8.] Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{x+t}\mathrm{d}t.$$

Tracer la courbe de F sur $]0, 30[$.

soit

Indication : on peut ~~soit~~ programmer une fonction `g(t,x)` *renvoyant en sortie le flottant* $\dfrac{\sin(tx)}{x+t}$, soit la **fonction** $t \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{x+t}$.

Lycée Chateaubriand, Rennes
Classe de Biospé 2022-2023
MYP

II Méthode de Simpson

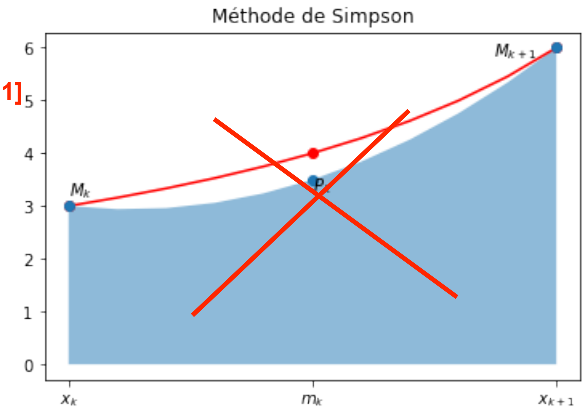
On reprend ici les notations de l'introduction du TP et on se place sur[a,b]=[0,1]

La méthode des rectangles donne un résultat exact pour les fonctions constantes

La méthode de Simpson est une méthode en un sens plus performante, puisque l'on montre que le résultat qu'elle fournit est exact pour les polynômes de degré au plus 3. C'est pourquoi cette méthode est implémentée dans la plupart des calculatrices.

Son principe est le suivant : on approche la courbe de la fonction f sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq n-1)$ par un arc de parabole passant par les points $M_k(x_k, f(x_k))$, $M_{k+1}(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ et $P_k(m_k, f(m_k))$ où $m_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ est le milieu du segment $[x_k, x_{k+1}]$.

demander de faire un dessin sur [xk,xk+1]



Un peu de calculs donne la formule suivante pour l'aire du domaine supposé approcher la valeur de l'intégrale. :

$$S_n = \frac{1}{6n}\left(f(0) + f(1) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 4\sum_{k=\cancel{1}\;0}^{n-1} f(m_k)\right),$$

On démontre que la suite (S_n) converge bien en effet vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

[Q9.]

1. Comparer les valeurs obtenues par la méthode des rectangles et par la méthode de Simpson pour le calcul de $J = \int_0^1 t^3 \mathrm{d}t$ en prenant $n = 2^k$ points, $k \in \{1, \ldots, 8\}$.
2. Même question pour le calcul de $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ défini en question **Q5.**