Suites numériques

I Convergence d'une suite réelle

1. Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

Définition 1 • La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
qui est équivalent à $(u_n - \ell)$ converge vers 0 ou $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$
c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente si, et seulement si, elle n'est pas convergente
c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ soit $\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A$
ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ soit $\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant -A$
ou la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite

2. Critères de convergence

a. Théorème des gendarmes ou d'encadrement

Proposition 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et admettent la même limite ℓ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Remarque On étend facilement cette proposition aux cas des limites infinies :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$
• Si $\lim\limits_n u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_n v_n = +\infty$
• Si $\lim\limits_n v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_n u_n = -\infty$

b. Théorème de convergence monotone

Proposition 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
• Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par un réel M alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant M$
• Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par un réel m alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ tel que $m \leqslant \ell$
• Si (u_n) est croissante et non majorée alors (u_n) tend vers $+\infty$
• Si (u_n) est décroissante et non minorée alors (u_n) tend vers $-\infty$

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Suites adjacentes

Définition 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si, et seulement si :
• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (au moins à partir d'un certain rang)
• $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (au moins à partir d'un certain rang)
• $\lim\limits_n (v_n - u_n) = 0$

Proposition 3 Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Exercice 2 Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ et } v_n = 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ sont adjacentes.}$$

c. Suites extraites

Définition 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
On appelle suite extraite des termes de rangs pairs (resp. impairs) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ (resp. $w_n = u_{2n+1}$)
On les note respectivement $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longleftrightarrow$ $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ et, dans ce cas, $\lim\limits_{n} u_n = \ell$

Exercice 3 Étudier la convergence de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$

d. Suites équivalentes

Définition 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang).
$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1.$

Proposition 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \Leftrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

II Suites implicites

a. **Définition 5** Une suite implicite est une suite dont le terme général est défini comme l'unique solution d'une équation (E_n) de la forme $f_n(x) = 0$ où f_n est une fonction qui dépend de n.

Pour étudier une suite implicite définie par une équation de la forme $(E_n) : f_n(x) = 0$
-On étudie la fonction f_n (permet d'établir l'existence et l'unicité de la solution x_n)
-On étudie les variations de f_n en plaçant x_n et x_{n+1} dans le tableau des variations de f_n (ou f_{n+1})
Pour cela, on a besoin de connaître le signe de $f_n(x_{n+1})$ (ou de $f_{n+1}(x_n)$).
-On peut parfois déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en passant à la limite dans l'égalité : $\forall n \in \mathbf{N}$, $f_n(x_n) = 0$.

a. **Exercice 4** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

Montrer que, pour tout $n > 0$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
On note x_n cette solution. Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ x_n \in]0, 1[$.
Pour tout $n > 0$, calculer $f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n)$.
En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$ puis le sens de variations de la suite $(x_n)_{n>0}$.
Montrer que la suite $(x_n)_{n>0}$ est convergente.
Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

III Suites complexes

a. Définition 6 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.
$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement s'il existe un nombre complexe ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$.

Remarque Pour tout entier naturel n, soit $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$.
Alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + i \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Attention Il n'y pas d'inégalités ni de $\pm\infty$ avec les nombres complexes donc les notions de sens de variations ou de limite infinie d'une suite complexe n'existent pas.

IV Suites récurrentes

a. Définition 7 Une suite récurrente est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
- son ou ses premiers termes
- une relation entre u_n et le ou les termes qui le précèdent

1. Suites arithmétiques

Définition 8 La suite arithmétique de premier terme u_O et de raison r est définie par :
$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
On a alors $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 + nr$, on a aussi : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_k + (n-k)r$.

Proposition 6 Si $r = 0$ alors (u_n) est constante égale à u_0 sinon $\lim\limits_n u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } r > 0 \\ -\infty \text{ si } r < 0 \end{cases}$.

Proposition 7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, $a < b$ deux entiers naturels.
Alors $\sum\limits_{k=a}^{b} u_k = (b-a+1)\dfrac{u_a+u_b}{2}$ (nombre de termes$\times$moyenne des termes extrèmes).

Remarque En particulier, la somme des n premiers entiers naturels vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Suites géométriques

Définition 9 La suite géométrique de premier terme u_O et de raison q est définie par : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = qu_n$.
On a alors $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 q^n$, on a aussi : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_k q^{n-k}$

Proposition 8 Convergence de la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = q^n$, $(q \in \mathbb{C})$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $q = 1$ ou $|q| < 1$.
- si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_n u_n = 0$
- si $q = 1$ alors (u_n) est constante égale à 1
- si $q = -1$ alors $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ et (u_n) n'a pas de limite
- si $q \in \mathbb{R}$ et si $q > 1$ alors $\lim\limits_n u_n = +\infty$

  si $q < -1$ alors $\lim\limits_n u_{2n} = +\infty$ et $\lim\limits_n u_{2n+1} = -\infty$ et (u_n) n'a pas de limite.

Proposition 9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, $a < b$ deux entiers naturels.

Si $q \neq 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = u_a \frac{1-q^{b-a+1}}{1-q} = 1\text{er terme}\times\frac{1-\text{raison}^{\text{nbre termes}}}{1-\text{raison}}$

En particulier, si $x \neq 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

3. Suites arithmético-géométriques

Définition 10 Une suite arithmético-géométrique est définie par : u_o et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Pour étudier une telle suite, on cherche l'unique réel x_0 tel que $ax + b = x$.

On a alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ x_0 = ax_0 + b \end{cases}$ d'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $(u_{n+1} - x_0) = a(u_n - x_0)$ et la suite$(u_n - x_0)_n$ est géométrique de raison a.

Exercice 5 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2$

4. Suites récurrentes linéaires à deux pas

Remarque Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+2} = az_{n+1} + bz_n$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On considère l'équation (E) : $z^2 - az - b = 0$.
• Si $\Delta \neq 0$, (E) possède deux solutions complexes distinctes z_1 et z_2 alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = Az_1^n + Bz_2^n$
• Si $\Delta = 0$, (E) possède une unique solution complexe z_0 alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = (An + B)z_0^n$.

proposition 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On considère l'équation (E) : $x^2 - ax - b = 0$.
• si (E) possède deux solutions réelles r_1 et r_2 alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$
• si (E) possède une unique solution réelle r_0 alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (An + B)r_0^n$
• si (E) possède deux solutions complexes conjuguées $re^{\pm i\theta}$ alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$

La détermination du couple (A,B) se fait à l'aide des deux premiers termes de la suite.

Exercice 6 Étudier la suite de Fibonacci définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

5. Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On s'intéresse à la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à sa limite éventuelle.

Première méthode

si f est croissante sur un intervalle contenant u_0
- On étudie la fonction f (domaine de définition, variations limites)
- On détermine le signe de $g(x) = f(x) - x$

les solutions de l'équation $f(x) - x = 0$ sont les limites éventuelles de la suite
- On construit le tableau de variations complet de f (avec u_0 et le signe de $f(x) - x$)
- On recherche un intervalle $\mathcal{I}$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$) et contenant u_0
- On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathcal{I}$. (Attention à ne pas oublier cette étape essentielle)
- On utilise le signe de $f(x) - x$ sur $\mathcal{I}$ pour déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- On conclut sur la convergence ou non à l'aide du théorème de convergence monotone
- On donne la limite éventuelle de la suite

Exercice 7 Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{3 + u_n}.$$

Deuxième méthode

si f est contractante sur un intervalle de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $\exists M < 1 \ / \ \forall x,\ \left|f'(x)\right| \leqslant M$
- On étudie la la fonction f (domaine de définition, variations limites)
- On recherche un intervalle $\mathcal{I}$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$), contenant u_0 et sur lequel f est contractante, on cherche alors un réel $M < 1 \mid \forall x \in \mathcal{I},\ \left|f'(x)\right| \leqslant M$
- On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in \mathcal{I}$
- On recherche l'unique point fixe de f sur $\mathcal{I}$ (c'est-à-dire l'unique réel ℓ de $\mathcal{I}$ tel que $f(\ell) = \ell$)
- On utilise le théorème des accroissements finis entre ℓ et u_n pour montrer que :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ , |u_{n+1} - \ell| \leqslant M|u_n - \ell|$.
- On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\ , |u_n - \ell| \leqslant M^n|u_0 - \ell|$
- On utilise le théorème d'encadrement pour conclure que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Exercice 8 Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite définie par :

$$u_0 = 6 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}\,.$$