Dynamique des populations

I Exemples de modèles discrets de dynamique des populations

Dans ce paragraphe, on considère une population seule (sans compétiteur extérieur, sans prédateur, sans coopérateur...) non divisée en compartiments (mâles/femelles, matures/immatures...).
Le temps est mesuré (en siècles, années, heures...) de manière discrète par un entier naturel n.
Au temps n on note p_n la taille de la population. En particulier on a toujours $p_n \geqslant 0$.
On suppose connue la taille initiale p_0 et la fonction de croissance f telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = p_n + f(p_n)$..
Mathématiquement on dispose donc d'une suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} p_0 > 0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = p_n + f(p_n) \end{cases}.$$

La question centrale en dynamique des populations est : quel est le devenir de cette population ?
Il s'agit donc de comprendre le comportement de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$.
Les différents cas possibles sont :
• $p_n \to 0$: extinction
• $p_n \to \ell \neq 0$: survie avec saturation
• $p_n \to +\infty$: explosion
• $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite ! C'est pénible mais ça peut arriver...

Le comportement de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de la fonction de croissance f choisie et, parfois, de p_0.
Les racines de f jouent un rôle important puisque si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ alors $f(\ell) = 0$.
Voici trois grands types de fonction de croissance dans le cas discret.

1. Croissance linéaire : modèle de Malthus

La fonction de croissance la plus simple est donnée par $f(p) = rp$ où r est une constante non nulle et strictement supérieure à -1.
Il s'agit ici d'une croissance linéaire.
Quand $r > 0$ la croissance n'étant pas freinée on s'attend à ce que la population augmente infiniment.
Quand $-1 < r < 0$ on s'attend à ce que la population tende vers zéro.
La suite est définie par : $\begin{cases} p_0 > 0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = p_n + rp_n \end{cases}.$

Exercice 1 Déterminer p_n en fonction de p_0 et n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

2. Croissance logistique : modèle discret de Verhulst

Dans le modèle précédent, lorsque $r > 0$, rien ne freine la population et la taille devient infinie.
Ceci n'est pas très réaliste... En effet les ressources ne sont pas infinies et il faut "lutter" pour elles.
Il y a donc une compétition intraspécifique (i.e. au sein de la même population) pour les ressources.
Pour modéliser cela, la fonction de croissance la plus simple est la croissance logistique définie par

$$f(p) = rp - rp^2 = rp(1-p) \text{ où } r > 0 \text{ est une constante.}$$

Il s'agit ici d'une croissance non linéaire.
Quand $p \approx 0$, on a $f(p) \approx rp$ et on est proche de la croissance linéaire de Malthus.
Néanmoins quand p grandit, le terme $-rp^2$ prend de l'importance et vient freiner la croissance.
La suite est définie par : $\begin{cases} p_0 > 0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = p_n + rp_n(1-p_n) \end{cases}.$

Dans ce cas non linéaire, on n'est plus capable de calculer tous les termes mais on peut parfois, par un raisonnement qualitatif, déterminer le comportement de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On sait déjà que si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ alors $\ell = 0$ (exctinction) ou $\ell = 1$ (survie avec saturation).

Remarque on peut montrer que quand $r > 2$ le comportement de la suite devient périodique/oscillant voire chaotique ! Cette grande difficulté mathématique a été résolue par le passage au temps continu. Néanmoins, du point de vue de la biologie, les phénomènes oscillants voire chaotiques sont observés et les modèles discrets permettent d'en rendre compte.

Exercice 2 On traite le cas particulier où $r = 1$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

3. Croissance bistable ou avec seuil : effet Allee

Dans le modèle de Verhulst, la croissance est maximale à faible taille de population.
Néanmoins, dans certains cas, à population faible, la croissance peut être freinée (effet Allee faible) voire négative (effet Allee fort) car il est alors difficile de trouver un partenaire sexuel et/ou les recombinaisons génétiques sont insuffisantes.
Pour modéliser cet effet Allee fort, on peut introduire un effet de seuil dans le modèle de Verhulst.
On se donne un seuil $0 < \theta < 1$.
Si p est inférieur à un seuil θ alors la population décroit, si p est supérieur à θ alors la population croit.
Le prototype d'une telle fonction de croissance est $f(p) = rp(p-\theta)(1-p)$ où $r > 0$ est une constante.

La suite est définie par : $\begin{cases} p_0 > 0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = p_n + rp_n(p_n-\theta)(1-p_n) \end{cases}$.

Il s'agit encore d'une croissance non linéaire mais c'est un modèle bistable puisque si $(p_n)_n$ converge vers une limite finie ℓ alors $\ell = 0$ (extinction) ou $\ell = \theta$ ou $\ell = 1$ (deux cas de survie avec saturation).

Exercice 3 On traite le cas particulier où $r = 1,\ \theta = \dfrac{1}{2}$ et $0 < p_0 < 1$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

II Exemples de modèles continus de dynamique des populations

On considère une population dont l'effectif au cours du temps est représenté par une fonction réelle N.
En l'absence d'interaction avec une autre population, on peut schématiser l'évolution de N par :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (b-d+m)N$$

où b, d et m sont les taux instantanés de naissances, décès et migrations respectivement.

1. Modèle de Malthus (1798)

Hypothèses : pas de migration, les taux de naissance b et de décès d sont proportionnels à $N(t)$.

On obtient alors l'équation différentielle :

$$(E_M)\ :\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (b-d)N$$

Exercice 4 Déterminer N en fonction de N_0 et t. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$ et interpréter.

Remarque Ce modèle ne tient pas compte de la capacité du milieu à soutenir une croissance exponentielle.

2. Modèle de croissance logistique de Verhulst (1836)

On pose $r = b - d$ et on suppose que $b > d$.
Rien ne freine la population et la taille devient infinie.

Pour tenir compte du milieu, on introduit un terme correctif et l'équation différentielle devient :

$$(E_V) : \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN - \frac{r}{K}N^2 = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

où K est un réel strictement positif représentant la charge utile de l'environnement (fonction de la capacité du milieu en nourriture).

Remarque • Si $K \to +\infty$, on retrouve le modèle de Malthus.
• Les deux fonctions constantes $t \mapsto 0$ et $t \mapsto K$ sont solutions de (E_V), elles correspondent à deux positions d'équilibre.

Cette équation différentielle n'est plus linéaire, c'est une équation autonome.
Pour la résoudre, on se place sur un intervalle I sur lequel N ne prend ni la valeur 0 ni la valeur K.
On obtient alors :

N vérifie (E_V) sur $I \Leftrightarrow \forall t \in I, \dfrac{N'(t)}{N(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right)} = r.$

Exercice 5 En primitivant cette égalité, déterminer N en fonction de N_0 et t.
Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$ et interpréter.

3. Modèle de Gompertz (1825)

On pose toujours $r = b - d$ et on suppose que $b > d$.
Rien ne freine la population et la taille devient infinie.
on introduit encore un terme correctif dans l'équation différentielle qui devient

$$(E_G) : \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN \ln \frac{K}{N}.$$

où K est un réel strictement positif représentant la capacité limite du milieu.

Remarque La fonction constante $t \mapsto K$ est solution de (E_G), elle correspond à une position d'équilibre.

Exercice 6 Déterminer N en fonction de N_0 et t. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$ et interpréter.