Corrigé DM2 - Fonction définie par une intégrale

1. **a.** Pour approximer $f(x)$, on utilise la méthode des rectangles :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\cos\left(\frac{k}{n}\right)}{x+\left(\frac{k}{n}\right)}$.

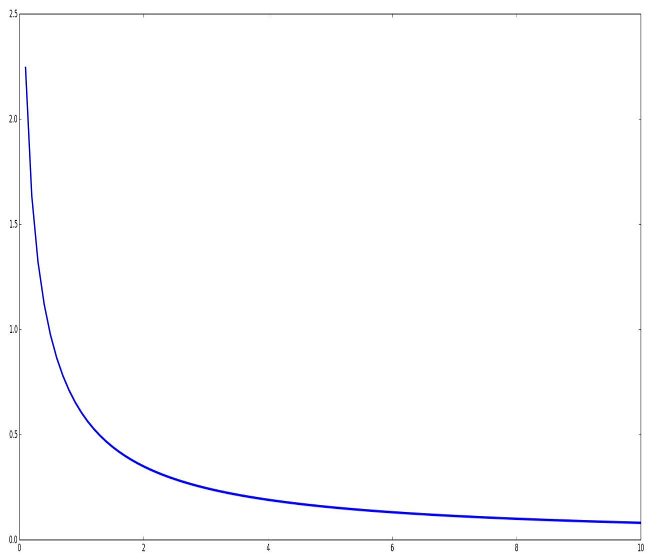
Puisque, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{x+t}$ est continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\cos t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
Ainsi, pour n assez grand, S_n est une approximation de $f(x)$.

```
import  numpy as np
n = 100
def f(x):
    S = 0
    for k in range(n):
        S += (np.cos(k/n))/(x+k/n)
    return S/n
```

b. On crée la liste des abscisses $Lx = [0.01, 10]$ et la liste des ordonnées $\left[f(x),\ x \in Lx\right]$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
Lx = np.linspace(0.01,10,1000)
Ly = f(Lx)
plt.plot(Lx,Ly)
plt.show()
```

On obtient :



On peut conjecturer que
$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

2. Soit $(x,x') \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que $x \leqslant x'$.

$$f(x) - f(x') = \int_0^1 \left(\frac{\cos t}{x+t} - \frac{\cos t}{x'+t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(x'-x)\cos t}{(x+t)(x'+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $0 < x \leqslant x'$ et $1 < \dfrac{\pi}{2}$, $\forall t \in [0,1]$, $x' - x \geqslant 0$ et $\cos t \geqslant 0$.

On en déduit que $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{(x'-x)\cos t}{(x+t)(x'+t)} \geqslant 0$

et, par positivté de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x'-x)\cos t}{(x+t)(x'+t)}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc $f(x) - f(x') \geqslant 0$.

On conclut que $\boxed{\forall (x,x') \in \mathbb{R}_+^{*2},\ x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')}$ et $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

3. **a.** Comme la fonction cosinus est décroissante sur $[0,1]$, $\forall t \in [0,1]$, $\cos 1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc $\forall x > 0,\ \forall t \in [0,1],\ \dfrac{\cos 1}{x+t} \leqslant \dfrac{\cos t}{x+t} \leqslant \dfrac{1}{x+t}$.

Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos 1}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\cos t}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t}$.

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t} = [\ln(x+t)]_0^1 = \ln(x+1) - \ln x = \ln\frac{x+1}{x}$,

on a bien $\boxed{\forall x > 0,\ (\cos 1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$, par encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\cos 1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$, par comparaison, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$.

4. **a.** En utilisant l'inégalité proposée dans l'énoncé : $\forall t \in [0,1],\ |\cos t - 1| \leqslant \dfrac{t^2}{2}$,

on obtient que $\forall x > 0,\ |g(x)| = \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t - 1}{x+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{\cos t - 1}{x+t}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

Comme $\forall x > 0,\ x+t > t,\ |g(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$ d'où $\boxed{\forall x > 0,\ |g(x)| \leqslant \frac{1}{4}}$.

b. On remarque que $g(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t = f(x) - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

D'après **a.**, $\forall x > 0,\ -\dfrac{1}{4} \leqslant f(x) - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{4} \leqslant f(x)$
$\leqslant \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \dfrac{1}{4}$.

Comme $\forall x \in]0,1[,\ \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x -$ et $\ln x > 0$,

on obtient $1 - \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} + \dfrac{1}{4\ln x} \leqslant \dfrac{f(x)}{-\ln x} \leqslant 1 - \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} - \dfrac{1}{4\ln x}$.

Enfin, comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{4\ln x} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure :
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{-\ln x} = 1$ et donc $\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (-\ln x) = +\infty$, on retrouve bien le résultat de **3b.** : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

5. On étudie la continuité de la fonction f.

a. Soit $a > 0$, $\forall x \in [\frac{a}{2}, +\infty[$, $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(a-x)\cos t}{(x+t)(a+t)}\,\mathrm{d}t$

donc $|f(x) - f(a)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{|x-a|}{(x+t)(a+t)}\,\mathrm{d}t$.

De plus, $\forall t \in [0,1],\ x+t > x > \dfrac{a}{2}$ et $a+t > a$ donc $(x+t)(a+t) > \dfrac{a^2}{2}$.

On en déduit que $\boxed{\forall x \in [\frac{a}{2}, +\infty[,\ |f(x) - f(a)| \leqslant 2\frac{|x-a|}{a^2}}$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{x\to a} 2\frac{|x-a|}{a^2} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ donc $\boxed{\text{pour tout } a > 0,\ f \text{ est continue en } a}$

ce qui est la définition de $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$.