DM3	Suite implicite

pour jeudi 19 octobre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

1. **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée a_n.
b. Déterminer a_1.
c. Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ 0 < a_n < 1$.

2. **a.** Écrire une fonction Python prenant n en entrée et donnant une valeur approchée de a_n à 10^{-5} près. On pourra utiliser la dichotomie.
b. Tester cette fonction pour $n = 2$ et donner une valeur approchée de a_2.

3. **a.** Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer le signe de $f_{n+1}(a_n)$.
En déduire les variations de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n^2a_n$.
a. Représenter sous Python la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \in [\![10, 40]\!]$.
Sur l'axe des ordonnées, on limitera à l'intervalle $[1.8, 2.1]$ à l'aide de l'instruction `ylim(1.8,2.1)` après avoir importé la fonction `ylim` de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
b. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
c. Déterminer un équivalent de a_n.