TD 4 : Suites réelles

1 Exercices d'application directe du cours

1 Donner un équivalent simple des suites de terme général suivant, ainsi que leur limite le cas échéant :

1. $u_n = e^{n+1} - n^2$.
2. $u_n = \ln\left(e^n - n^2\right)$.
3. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\ln(n)}\right)^n$,
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
5. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln n}$,
6. $u_n = n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$,

2 Établir l'existence et calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,k+n}{n^2+k\,n+k^2}.$$

2 Exercices classiques

3 Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$$

1. Vérifier que pour tout entier n, $u_n > 0$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

4 Étudier en fonction du premier terme u_0 la suite suivante définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - {u_n}^2.$$

5 On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{ et :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{1+{u_n}^2}}.$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$.

1. Vérifier que pour tout entier n non nul, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution notée a, et vérifier que $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que pour tout x dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
4. Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{4}\,|u_n - a|.$$

En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

6 De la même manière que précédemment, étudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 > -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}. \end{cases}$$

$\boxed{7}$ 1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

est monotone et bornée. Conclusion ?

3. En déduire un équivalent de $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{8}$ Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée α_n.
   Préciser la limite de la suite $(\alpha_n)_n$.
2. (a) Démontrer que $\alpha_n \geqslant e^n$.
   (b) Démontrer que $\alpha_n \underset{\infty}{\sim} e^n$.

$\boxed{9}$ Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = x - n \ln x.$$

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation

$$f_n(x) = 0 \qquad (E_n)$$

admet deux solutions notées u_n et v_n vérifiant $1 < u_n < n < v_n$. Préciser la limite de la suite (v_n).

2. Pour tout entier $n \geqslant 3$, étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$, puis en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
3. Justifier de la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ admet pour limite 1.
5. Trouver un équivalent simple de $u_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{10}$ On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
   Que peut-on en conclure pour la suite u ?
2. Démontrer que :

$$\forall x \neq -1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x} = \frac{1}{1+x}.$$

En intégrant cette égalité entre 0 et 1, démontrer que u converge vers $\ln 2$.

3 Autre exercice

$\boxed{11}$ On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par la condition $0 < u_0 \leqslant v_0$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune.
On pourra commencer par montrer $0 < u_n \leqslant v_n$ pour tout entier naturel n.