TD 5 : Dynamique des populations

1 L'évolution de l'effectif d'une population donnée est décrite par le modèle suivant :

$$\begin{cases} P_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = \dfrac{K_0\, P_n}{P_n + K}. \end{cases}$$

où P_n est l'effectif de la population étudiée à la date n, K_0 et K sont deux réels strictement positifs qui ne dépendent pas de n tels que $K_0 < K$.

1. Montrer que $P_n > 0$ pour tout entier $n > 0$.
2. Montrer que $Q_n = 1/P_n$ est le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
3. En calculant la forme explicite de Q_n, discuter suivant les valeurs de K et K_0 le comportement de P_n à l'infini.
4. Interpréter les résultats précédents en termes d'évolution de la population.

2 **Étude de la dynamique d'une population de cerfs.**
Soit μ et K deux nombres réels tels que $0 < \mu < 1$ et $K > 0$. Selon le modèle de Ricker, l'évolution de la population de cerfs peut être décrite par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n e^{\mu(1-x_n/K)}. \end{cases}$$

1. On pose pour x réel : $f(x) = xe^{\mu(1-x/K)}$.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet 2 solutions notées α et β ($\alpha < \beta$).
   Que peut-on dire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $x_0 = \alpha$? Si $x_0 = \beta$?
   Que représentent concrètement α et β pour les populations de cerfs ?
   (b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f.
   (c) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \geqslant 0$.
2. On suppose dans cette question que $x_0 \in]0, K[$.
   (a) Programmer en `Python` une fonction `X(n,x0,mu,K)` prenant en entrée un entier n, des flottants x_0, μ, K et renvoyant en sortie la liste $[x_0, \dots, x_n]$ des termes de la suite (x_n) correspondante au choix de ces paramètres.
   (b) Faire plusieurs essais de la fonction X avec $K = 1000$ en faisant varier les valeurs de x_0 et μ.
   (c) Faire une conjecture sur le sens de variations et la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Mêmes questions qu'en 2. avec $x_0 \in [K, K/\mu]$.
4. Dans cette question, on suppose que $x_0 \in [K/\mu, +\infty[$.
   (a) Conjecturer le sens de variations et la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\gamma \in [K/\mu, +\infty[$ tel que $f(\gamma) = K$.
   (c) Étudier alors la convergence de la suite (x_n).
5. On revient au cas de la question 3. Écrire en Python le script d'une fonction qui prend en entrée x_0, K, μ et renvoie le plus petit entier tel que $x_n \geqslant K/2$.

$\boxed{3}$ **Modèle de Johnson-Schumacher.**

Soit r et K deux réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(JS) \qquad y' = ry\left(\ln \frac{y}{K}\right)^2$$

1. Calculer les solutions constantes de (JS).
2. Soit y une solution non constante de (JS), définie sur un intervalle I contenant 0 telle que $y(0) = y_0 \in]0, K[$ et ne prenant jamais les valeurs 0 et K sur I.
   (a) Montrer que : $\forall t \in I \quad 0 < y(t) < K$.
   (b) Déterminer y et I.
3. Soit $y_0 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{K\}$. Déterminer la solution de (JS) vérifiant $y(0) = y_0$.
4. Représenter graphiquement les solutions pour quelques valeurs de y_0 ainsi que les solutions constantes de (JS).