Les polynômes

I Ensemble IK[X]

Définitions 1 • Une fonction polynôme (ou un polynôme) à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une fonction définie de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ de la forme : $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ où n est un entier naturel et $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

• pour tout entier naturel k, on convient de noter X^k la fonction polynôme : $x \mapsto x^k$.
ainsi : $X^0 : x \mapsto 1$, $X : x \mapsto x$, $X^2 : x \mapsto x^2$ etc.
et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

• soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme

l'élément a_k est appelé le coefficient d'indice k de P

l'élément a_0 est appelé le terme constant de P

l'élément a_n est appelé le coefficient dominant et $a_n X^n$ est le terme dominant de P

le dégré de P est l'indice du dernier terme non nul : si $a_n \neq 0$ alors $\deg P = n$

On convient que le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$

• un monôme est un polynôme qui n'a qu'un seul coefficient non nul

• le polynôme nul, noté 0, est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls

Notations $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$
et pour tout entier naturel n
$\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n
$\mathbb{C}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à n

Exercice 1 Soit $P = 4X^3 - X + 2$ et $Q = iX^7 + (1+i)X$.
Dire à quels ensembles appartiennent P et Q et donner leur degré.
Donner le terme dominant, le coefficient dominant et le terme constant de P et Q.

Exercice 2 Mêmes questions pour $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

Proposition 1 Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux.
Autrement dit : soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes.
Alors $P = Q \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k$.
En particulier, $P = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0$.

Exercice 3 Montrer que si P est une fonction polynôme paire (resp. impaire) alors tous ses coefficients d'indice impair (resp. pair) sont nuls

II Opérations dans IK[X]

Définition 2 Dans $\mathbb{K}[X]$, soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, on définit les opérations suivantes :

• l'addition : $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$ en posant $a_k = 0$ si $k > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$

• la multiplication par un scalaire : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$

• le produit $PQ = \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) X^n$ en posant $a_k = 0$ si $k > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$

• la composition de deux polynômes $P \circ Q = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{i=0}^{q} b_i X^i \right)^k$

Proposition 2 Opérations et degré : soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$

• $\deg(P+Q) \leqslant Max(\deg(P), \deg(Q))$
Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = Max(\deg(P), \deg(Q))$
La réciproque est fausse

• soit $\lambda \neq 0$, $\deg(\lambda P) = \deg(P)$

• $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
$PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$

• si $P \neq 0$ alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Exercice 4 Soit $P = 4X^3 - X + 2$ et $Q = X^6 + X$.
Déterminer $P + Q$, $-2P$, PQ, et $P \circ Q$.

III Polynômes dérivés dans IK[X]

Définition 3 Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Le polynôme dérivé de P est le polynôme P' défini par :
$P' = 0$ si $\deg P \leqslant 0$
et $P' = \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_{k+1} X^k$ si $\deg P \geqslant 1$.

Proposition 3 si $\deg P \geqslant 1$ alors $\deg P' = \deg P - 1$
si $\deg P \leqslant 0$ alors $\deg P' = -\infty$ (car dans ce cas, $P' = 0$)

Proposition 4 Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
•$(P+Q)' = P' + Q'$

•$(\lambda P)' = \lambda P'$

•$(PQ)' = P'Q + PQ'$

•$(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$

Définition 4 On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre k (noté $P^{(k)}$) de P par :
$P^{(0)} = P$
et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$

Exercice 5 Pour tout entier naturel k, déterminer $P^{(k)}$ où
1) $P = 4X^3 - X + 2$ 2) $P = X^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

IV Racine d'un polynôme

Définition 6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. α est une racine de P si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$.

Proposition 5 α est racine de $P \Leftrightarrow P$ est factorisable par $(X - \alpha)$
Autrement dit, α est racine de $P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ P = (X - \alpha)Q$

Définition 7 Soit k un entier naturel non nul.
α est une racine d'ordre k de P
$\Leftrightarrow P$ est factorisable par $(x - \alpha)^k$
$\Leftrightarrow$ il existe Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k Q$
$\Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ (les k premiers polynômes déivés de P s'annulent en a)

Exercice 6 Soit $P = X^4 - 1$. Justifier que 1 est racine de P et donner son ordre de multiplicité.

Proposition 6 Soit p un entier naturel non nul et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$.
$\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ sont p racines deux à deux distinctes de P
$\Leftrightarrow$ P est factorisable par $(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_p)$
$\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ P = (X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_p)Q$.

Exercice 7 Soit n, p, q trois entiers naturels et $P = X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.
On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que j et $\overline{j}$ sont racines de P.
En déduire que : $\exists Q \in \mathbb{R}[X] \ / \ P = (X^2 + X + 1)Q$.

Proposition 7 Un polynôme de degré inférieur ou égal à n a au plus n racines distinctes.
S'il a au moins $(n + 1)$ racines deux à deux distinctes alors il est nul.

V Factorisation dans IK[X]

Définition 8 P est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, on ne peut pas factorier P dans $\mathbb{K}[X]$.

Exemple $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ car $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

Proposition 8 Théorème de d'Alembert-Gauss
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquence •Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P = n$. Soit a_n sont coefficient dominant.
Alors P admet n racines complexes $r_1, \cdots, r_n$ (pas nécessairement distinctes)
$P = a_n(X - r_1)(X - r_2)\ldots(X - r_n)$ où les racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ne sont pas nécessairement distinctes.

Remarques •Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.
•Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $r \in \mathbb{C}$.
r est racine d'ordre k de P si, et seulement si, $\bar{r}$ est racine d'ordre k de P.

Exercice 8 1) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
$P = X^4 - X^2 + 1$, $Q = X^6 + X^3 + 1$
2) Soit $R = X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$.
Vérifier que $1 + i$ est racine de P puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.