Les polynômes

Ce qu'il faut savoir :
-degré et terme dominant d'un polynôme
-polynômes dérivés d'un polynôme
-racine et racine d'ordre k d'un polynôme
-la factorisation qui se déduit de la connaissance des racines d'un polynôme

1. **Comment déterminer le degré d'un polynôme** P
   On étudie le coefficient dominant de P
   -si ce coefficient est non nul alors son indice est égal au degré de P
   -si ce coefficient est nul, on étudie le coefficient d'indice précédent etc.

2. **Comment montrer que** α **est racine d'un polynôme** P
   a. on montre que $P(\alpha) = 0$
   b. on factorise P par $(X - \alpha)$

3. **Comment montrer que** α **est racine d'ordre** k **d'un polynôme** P
   a. on montre que les k 1ers polynômes dérivés de P s'annulent en α :
   $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$
   b. on factorise P par $(X - \alpha)^k$.

4. **Comment déterminer les racines d'un polynôme** P
   a. pour un trinôme P de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ $(a \neq 0)$
   - s'il y a une racine évidente x_1 alors l'autre racine est telle que $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
   - sinon on caclule Δ et on applique le cours

   b. pour un polynôme de degré 3
   -on cherche une racine évidente r
   -on cherche a, b, c tels que $P = (X - r)(aX^2 + bX + c)$
   -on cherche les racines du trinôme $aX^2 + bX + c$.

   c. pour un polynôme bicarré $P = aX^4 + bX^2 + c$
   -on cherche les racines du trinôme $aX^2 + bX + c$
   -pour chacune de ces racines, on cherche leur deux racines carrées.

5. **Comment déterminer deux nombres** x **et** y **dont on connaît la somme et le produit**
   -on pose $s = x + y$ et $p = xy$
   -x et y sont les deux racines du trinôme $X^2 - sX + p$

6. **Comment factoriser un polynôme** P
   -on détermine le coefficient dominant a_n de P
   -on détermine l'ensemble des racines $r_1, \cdots, r_n$ de P
   -on conclut que $P = a_n(X - r_1)\cdots(X - r_n)$.