TD 6 : Polynômes

1 Factoriser les polynômes :

1. $P = X^4 + 4$,
2. $Q = X^4 + X^2 + 1$,
3. $R = 2X^3 - 14X + 12$.

2 Soit θ un réel n un entier naturel non nul, $P = X^2 - 2\cos\theta \cdot X + 1$, et $Q = X^{2n} - 2\cos(n\theta) \cdot X^n + 1$. Montrer que Q se factorise par P.

3 On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ par la donnée de $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = X\, P_{n+1} - P_n.$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le terme dominant du polynôme P_n.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_n\Big(z + \frac{1}{z}\Big) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, le réel $\alpha_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\,\frac{\pi}{n}\right)$ est racine de P_n. Ces racines sont-elles deux à deux distinctes ? Que peut-on en conclure ?

4 Soit $n \geq 2$ un entier. Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $P = (X+i)^n - (X-i)^n$.
Indication : déterminer les racines en résolvant tout d'abord l'équation $Z^n = 1$ et justifier comment s'y ramener par un choix de Z à préciser.

5

1. Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 2, à coefficients réels et dont les racines sont toutes réelles et simples :

$$P = a \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)$$

où $a \neq 0$, $p \geqslant 2$ et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$.
Montrer que P' a également toutes ses racines réelles et simples. *Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle sur des intervalles bien choisis.*

2. Soit P un polynôme non nul de degré supérieur ou égal à 2, à coefficients réels et dont les racines sont toutes réelles :

$$P = a \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

où $a \neq 0$, $p \geqslant 2$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ et $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, P' se factorise par $(X - \alpha_k)^{m_k - 1}$.

(b) Montrer alors que P' a également toutes ses racines réelles.