Systèmes linéaires - Espaces vectoriels

I Résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Nous devons déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{K}^n$ du
système linéaire (S) de n équations à p inconnues :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{où}$$

• $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des p inconnues

• $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des n seconds membres

• $A = (a_{ij})_{i\in\{1,\cdots,n\}, j\in\{1,\cdots,p\}}$ est la matrice associée au système (S).

Si $(b_1, b_2, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$ alors le système (S) est dit homogène.
L'écriture matricielle du système (S) est $AX = B$

ou encore : $\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$.

2. Technique du Pivot de Gauss

Proposition 1 Les trois opérations élémentaires sur les lignes transforment (S) en un système équivalent.
-$L_i \leftrightarrow L_j$: échange des lignes L_i et L_j.
-$L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: multiplication de la ligne L_i par λ non nul
-$L_i \leftarrow L_i + aL_j$: remplacement de la ligne L_i par $L_i + aL_j$.

Remarque Attention, souvent on combine les deux dernières opérations en une seule étape : $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$
mais dans ce cas, il faut absolument vérifier que $a \neq 0$
ou même, pour $L_i \leftarrow \sum_{k=1}^{n} a_k L_k$ alors, vérifier que $a_i \neq 0$.
Les opérations élémentaires sur les lignes (éventuellement des échanges de colonnes)
permettent de transformer le système (S) en un système (S') équivalent réduit

-partiellement : $\left(\begin{array}{cc|c} T_{rr} & Q_{r(p-r)} & c_1 \\ & & \vdots \\ O_{(n-r)r} & O_{(n-r)(p-r)} & c_n \end{array}\right)$

où T_{rr} est une matrice triangulaire supérieure d'ordre r dont les éléments diagonaux sont non nuls.

-totalement : $\left(\begin{array}{cc|c} I_{rr} & Q_{r(p-r)} & c_1 \\ & & \vdots \\ O_{(n-r)r} & O_{(n-r)(p-r)} & c_n \end{array}\right)$

où I_{rr} est la matrice unité d'ordre r et $O_{k\ell}$ est la matrice nulle à k lignes et ℓ colonnes.
Les r éléments diagonaux non nuls sont appelés pivots (de Gauss)

r est le rang du système (S).

Proposition 3 Avec les notations précédentes, nécessairement, $1 \leqslant r \leqslant \inf\{n,p\}$:

1er cas : $1 \leqslant r < \inf\{n,p\}$.

(S) est compatible si, et seulement si, les $n-r$ relations de compatibilité
($0 = c_i,\ i \in \{r+1,\cdots,n\}$) sont vérifiées.
Dans ce cas, (S) admet une infinité de solutions $(x_1,\cdots,x_p)$ que l'on exprime à l'aide des $p-r$ inconnues auxiliaires (paramètres) $x_{r+1},\ \cdots,x_p$ et des valeurs $c_1,\cdots,c_n$.
Sinon, (S) est impossible

2e cas : $1 \leqslant r = n < p$.

(S) admet une infinité de solutions que l'on exprime à l'aide des $p-r$ inconnues auxiliaires (paramètres) $x_{r+1},\ \cdots,x_p$ et des valeurs $c_1,\cdots,c_n$.

3e cas : $1 \leqslant r = p < n$.

(S) est compatible si, et seulement si, les $n-r$ relations de compatibilité
($0 = c_i,\ i \in \{r+1,\cdots,n\}$) sont vérifiées.
Dans ce cas, (S) admet une unique solution
(avec le pivot total, on obtient $(x_1,\cdots,x_p) = (c_1,\cdots,c_p)$).
Sinon, (S) est impossible

4e cas : $1 \leqslant r = p = n$.

(S) est un système de Cramer et admet une unique solution
(avec le pivot total, on obtient$(x_1,\cdots,x_p) = (c_1,\cdots,c_p)$).

Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrl} x-y-2z &=& -2 & (\mathrm{L}_1) \\ 2x-3y-2z &=& 3 & (\mathrm{L}_2) \\ -x-2y-3z &=& 1 & (\mathrm{L}_3) \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrl} 2x-y+3z+2t &=& 0 & (\mathrm{L}_1) \\ -3x+y-5z-t &=& -1 & (\mathrm{L}_2) \\ 5x-3y+10z+4t &=& -1 & (\mathrm{L}_3) \\ -4x+2y-7z-3t &=& 0 & (\mathrm{L}_4) \end{array}\right.$$

Remarque Cas d'un système de deux équations à deux inconnues:

Soit $(S) : \left\{\begin{array}{rcll} ax+by &=& c & (\mathrm{L}_1) \\ a'x+b'y &=& c' & (\mathrm{L}_2) \end{array}\right.$.

(S) admet une unique solution (est de Cramer) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow ab'-a'b \neq 0.$

Dans ce cas : avec $\mathrm{L}_1 \leftarrow b'\mathrm{L}_1 - b\mathrm{L}_2$ (pour trouver $x,$ on annule y) et $\mathrm{L}_2 \leftarrow a\mathrm{L}_2 - a'\mathrm{L}_1$ (pour trouver $y,$ on annule x)on obtient

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (ab'-a'b)x &=& b'c-bc' \\ (ab'-a'b)y &=& ac'-a'c \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{b'c-bc'}{ab'-a'b} \text{ et } y = \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

II Structure d'espace vectoriel

1. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

Définition 1 $\mathbb{R}^n$ (et $\mathbb{C}^n$) muni de l'addition et du produit par un scalaire a une structure d'espace vectoriel.
C'est-à-dire : $\forall(u,v,w) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

Pour l'addition + :
$u+v \in \mathbb{R}^n$ (l'opération + est interne)
$u+v = v+u$ (l'opération + est commutative)
$(u+v)+w = u+(v+w)$ (l'opération + est associative)
$u+0 = u$ ($\mathbb{R}^n$ possède un élément neutre pour la loi +)
$u+(-u) = 0$ et $-u \in \mathbb{R}^n$ (tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ admet un opposé dans $\mathbb{R}^n$)

Pour la multiplication par un scalaire $\bullet$
$1 \bullet u = u$
$\lambda \bullet (u+v) = \lambda \bullet u + \lambda \bullet v$
$(\lambda+\mu) \bullet u = \lambda \bullet u + \mu \bullet u$
$\lambda \bullet (\mu \bullet u) = \mu \bullet (\lambda \bullet u) = (\lambda\mu) \bullet u$

Proposition 4 Règles de calcul : $\forall(u,v,w) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$
$(-1) \bullet u = -u$
$u+v = u \Leftrightarrow v = 0$
$\lambda \bullet u = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0$
$\lambda \bullet u = \mu \bullet u \Rightarrow \lambda = \mu$
$\lambda \bullet u = \lambda \bullet v \Rightarrow u = v$

Définition 2 Soit $u_1,\dots,u_p$ p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle combinaison linéaire de ces p vecteurs tout vecteur de la forme $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$ où $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont p réels.
On dit qu'un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des p vecteurs $u_1,\dots,u_p$ si, et seulement s'il existe p réels $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que : $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$.

Exemple dans $\mathbb{R}^3$, soit $u = (-1,0,4)$, $v = (3,2,-6)$ et $w = (0,3,-2)$
une combinaison linéaire de u,v et w est un vecteur de la forme :
$\lambda u + \mu v + \nu w = (-\lambda+3\mu, 2\mu+3\nu, 4\lambda-6\mu-2\nu)$ et $x = (4,-4,-6)$ est combinaison linéaire de u,v et w pour $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $\nu = -2$.

2. Autres espaces vectoriels

Munis de l'addition et du produit par un scalaire, les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :
-$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites de nombres réels
-$\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, ensemble des applications définies sur un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$
-$\mathbb{R}[X]$ (et $\mathbb{C}[X]$), ensemble des polynômes à coefficients dans réels (complexes)
-$\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ (et $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{C})$), ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels (complexes)
-$\mathbb{R}^{\Omega}$, ensemble des variables aléatoires réelles définies sur un univers Ω

3. Sous-espace vectoriel

Définition 3 Soit E un espace vectoriel.
Un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F est stable pour les lois d'addition et de produit par un scalaire.
Autrement dit, F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :
- $F \subset E$
- $F \neq \varnothing$
- $\begin{cases} \forall (u,v) \in F^2,\ u+v \in F \\ \forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u \in F \end{cases}$.

Il est souvent plus rapide d'utiliser la proposition suivante :

Proposition 5 Soit E un espace vectoriel.
F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F est un sous-ensemble de E contenant le vecteur nul et stable par combinaison linéaire.
Autrement dit F est un sev de E si, et seulement si :
- $F \subset E$
- $0 \in F$
- $\forall (u,v) \in F^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u + \mu v \in F$
(ou encore $\forall (u,v) \in F^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $tu + v \in F$)

Exemples usuels de sous-espaces vectoriels

• Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène
  (ex : le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - 3y + 5z = 0$ est un sous-espace vectoriel)
• Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites convergentes
  l'ensemble des suites bornées
  l'ensemble des suites arithmétiques
• Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$
  l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène
• Dans $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n
• Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices diagonales
  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures
  l'ensemble des matrices symétriques (telles que ${}^tA = A$)

Quelques contre-exemples

• Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des solutions de $2x - 3y + 5z = 1$
• Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites géométriques
• Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions bijectives
• Dans $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes de degré n
• Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices inversibles

4. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Proposition 6 Soit E un espace vectoriel.
L'intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 4 Soit E un espace vectoriel et A une partie de E.
Le sous-espace vectoriel engendré par A est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de A.
On le note $Vect(A)$ et on dit que A est une partie génératrice de ce sous-espace vectoriel.
Si $A = \{u_1, \cdots, u_p\}$ alors $Vect(A) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\}$.

Remarque $Vect(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A
C'est aussi le plus petit sous-espaces vectoriel de E contenant A.

Exercice 2 (1) Dans $\mathbb{R}^3$, soit $A = \{u = (-1,0,4)\ ,\ v = (3,2,-6)\}$, déterminer $Vect(A)$.
(2) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que $vect(A, B) = vect(C, D)$.

III Base et dimension d'un espace vectoriel

1. Base et base canonique

Définition 5 Soit E un espace vectoriel.
Une base de E est une partie génératrice minimale de E
c'est-à-dire une partie génératrice de E telle qu'aucun de ses vecteurs ne soient combinaison linéaire des autres vecteurs de cette partie.

Autrement dit, une partie $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ de E est une base de E si, et seulement si :
(i) $E = vect(\mathcal{B})$ soit $\forall u \in E,\ \exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \ /\ u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$
(ii) $\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$

Remarque L'assertion (ii) est la définition d'une partie libre.
Si cette implication est fausse alors l'un des $\lambda_k \neq 0$ et $u_k = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_k} u_1 - \ldots - \dfrac{\lambda_p}{\lambda_k} u_p$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{B}$.
On a alors la définition suivante : une base de E est une partie libre et génératrice de E.

Proposition 7 • Soit $A = \{u\}$.
A est libre $\Leftrightarrow$ $u \neq 0$.
• Soit $A = \{u, v\}$.
A est libre $\Leftrightarrow$ u et v ne sont pas colinéaires.
• Toute partie qui contient le vecteur nul est liée.
• Dans $\mathbb{R}[X]$, toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.

Démonstration À faire en exercice

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de $vect(A)$ où $A = \{u = (1,0,-4),\ v = (0,1,3),\ w = (3,2,-6)\}$.

Définition 6 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_p\}$une base de E.
Tout vecteur u de E se décompose de manière unique en une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$.

Autrement dit : $\forall u \in E\ ,\ \exists!(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \ /\ u = x_1 u_1 + \ldots + x_p u_p$.

Le p-uplet $(x_1,\ldots,x_p)$ est appelé le p-uplet des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est appelée la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$, soit E le plan d'équation $4x-3y+z=0$.
Montrer que $\mathcal{B}=\{u=(1,0,-4), v=(0,1,3)\}$ est une base de E.
Déterminer les coordonnées de $w=(3,2,-6)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 7 -La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ où
$e_1=(1,0,\ldots,0), e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,0,\ldots,0,1)$
Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $\exists!(x_1,\ldots,x_n)\ |\ u=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ke_k$.
-La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $B=\{1,X,X^2,\cdots,X^n\}$.
Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, $\exists!(a_0,\ldots,a_n)\ |\ P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k$
-La base canonique de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ est $B=\{E_{ij},\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p\}$
où E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices ij qui vaut 1.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, $\exists!(a_{ij}, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p)\ |\ A=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p}a_{ij}E_{ij}$.

2. Dimension

Remarque il n'y a pas unicité du choix d'une base d'un espace vectoriel donné mais on admet que toutes les bases d'un espace vectoriel donné admettent le même nombre d'éléments.

Définition 8 Soit E un espace vectoriel possédant une base finie.
On appelle dimension de E, et on note $\dim E$, le nombre d'éléments d'une base de E.

Exercice 5 Déterminer les dimensions de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, le plan E d'équation $4x-3y+z=0$

Proposition 8 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}=\{u_1,\cdots,u_p\}$ une famille de p vecteurs de E.
-Théorème de la base incomplète : si $\mathcal{F}$ est libre alors :
$p\leqslant n$ et il existe $n-p$ vecteurs $u_{p+1},\cdots,u_n$ de E tels que $\mathcal{B}=\{u_1,\cdots,u_p,u_{p+1},\cdots,u_n\}$ soit une base de E.
En particulier, toute partie libre de E a au plus n vecteurs.
-Extraction d'une base : si $\mathcal{F}$ est une partie génératrice de E alors :
$n\leqslant p$ et il existe n vecteurs de $\mathcal{F}$ qui forment une base de E.
En particulier, toute partie génératrice comporte au moins n vecteurs.
-Caractérisation des bases : si $p=n$ alors on a les équivalences :
$\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est génératrice de E $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est une base de E.

Exercice 6 Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $\begin{cases} P_1=-X^3+3X^2+X+2 \\ P_2=5X^3+X^2+2X+4 \\ P_3=2X^3+5X^2+X+3 \\ P_4=X^3+3X^2+2X+5 \end{cases}$.
Montrer que $\mathcal{F}=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Rang d'une famille de vecteurs

Définition 9 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
On appelle rang de $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$.
Autrement dit : $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim vect(\mathcal{F})$ est le nombre maximum de vecteurs de $\mathcal{F}$ linéairement indépendants.

Proposition 9 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E. Alors :
-$\text{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \min(n,p)$
-$\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow rg(\mathcal{F}) = p$
-$\mathcal{F}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow rg(\mathcal{F}) = n$
-$\mathcal{F}$ est une base de $E \Leftrightarrow rg(\mathcal{F}) = n = p$.

Exercice 7 -Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer $\text{rg}(u,v)$ où $u = (1,0,2)$ et $v = (-1,1,3)$.

-Dans $\mathbb{R}_3[X]$, déterminer $\text{rg}(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ où $\begin{cases} P_1 = -X^3 + 3X^2 + X + 2 \\ P_2 = 5X^3 + X^2 + 2X + 4 \\ P_3 = 2X^3 + 5X^2 + X + 3 \\ P_4 = 8X^3 + 3X^2 + 2X + 5 \end{cases}$.

4. Changement de base

Définition 10 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{u_1,\dots,u_n\}$ une base de E.
Soit $\mathcal{F} = \{v_1,\dots,v_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
On pose : $\forall j \in \{1,\cdots,n\},\ v_j = p_{1j}u_1 + \cdots + p_{nj}u_n = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}u_i$
Soit $P = (p_{ij})_{i\in\{1,\cdots,n\},j\in\{1,\cdots,n\}}$ la matrice carrée d'ordre n dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées du vecteur v_j de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$, pour tout j de $\{1,\cdots,n\}$.
Alors $\mathcal{F}$ est une base de $E \Leftrightarrow rg(\mathcal{F}) = n \Leftrightarrow P$ est inversible.
Dans ce cas, P est appelée la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$.
De plus, pour tout vecteur u de E, si X (resp. X') est la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{F}$) alors $X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X$.

Remarque P est inversible car $rg(u_1,\dots,u_n) = rg(v_1,\dots,v_n) = n$.

Exercice 8 Soit $\mathcal{B} = (i,j,k)$ une base d'un espace vectoriel E.
Montrer que $\mathcal{F} = (j+k, k+i, i+j)$ est une base de E.
Calculer les coordonnées du vecteur $u = i + 2j - k$ dans cette base.