Corrigé DM3 - Suite implicite

1. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = 3nx^2 + n^2x$.

Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $f_n(x) \sim nx^3$ quand $x \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Ainsi, pour tout $n > 0$, f_n définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution}}$.

b. On remarque que 1 est racine évidente de l'équation $x^3 + x - 2 = 0$.

Comme a_1 en est l'unique racine, on conclut que $\boxed{a_1 = 1}$.

c. Pour tout $n > 0$, $f_n(0) = -2$ et $f_n(1) = n + n^2 - 2 = (n-1)(n+2)$.

On endéduit que : $\forall n \geqslant 2$, $f_n(0) < 0 < f_n(1)$.

La fonction f_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ 0 < a_n < 1}$.

2. **a.** On utilise la dichotomie pour déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de l'unique racine a_n de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $[0, 1]$:

```
def a(n):
    def f(n,x):
        return n*x**3+n**2*x-2
    u, v = 0, 1
    while (v-u)/2 > 1e-5:
        c = (u+v)/2
        if f(n,u)*f(n,c) > 0:
            u = c
        else:
            v = c
    return round(c,5)
```

b. L'instruction `print`$(a(2))$ donne une valeur approchée de a_2 à 10^{-3} près : $\boxed{a_2 \approx 0.45339}$.

c. Pour tout $n \geqslant 2$, $f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2a_n - 2$ or $f_n(a_n) = na_n^3 + n^2a_n - 2 = 0$.

On en déduit que $f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2a_n - 2 - (na_n^3 + n^2a_n - 2) = a_n^3 + (2n+1)a_n$.

Comme $\forall n \geqslant 2$, $a_n > 0$, $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ f_{n+1}(a_n) > 0}$.

Comme $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$, $f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$ et comme f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\forall n \geqslant 2$, $a_n > a_{n+1}$. On en conclut que la suite $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 2} \text{ est strictement décroissante}}$.

d. La suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante et $\forall n \geqslant 2$, $0 < a_n < 1$.

On déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ de $[0, 1]$.

Par définition de a_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, $na_n^3 + n^2a_n - 2 = 0$.

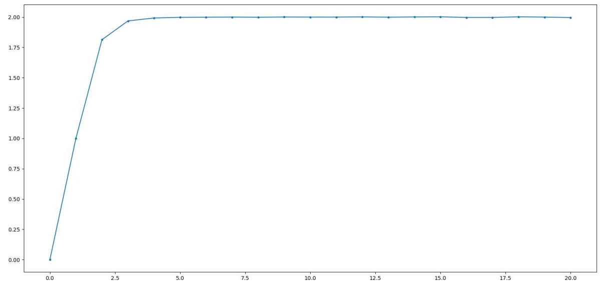
Si $\ell > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(na_n^3 + n^2a_n - 2) = +\infty$ ce qui est impossible.

On en conclut que $\ell = 0$ c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$.

3. **a.** Pour représenter la suite $(u_n)_{n\in[\![0,20]\!]}$ où $u_n = n^2a_n$, on utilise la fonction précédente :

```
import matplotlib.pyplot as plt
Ln = range(21)
Lu = [n**2*a(n) for n in Ln]
plt.plot(Ln,Lu,marker = '.')
plt.show()
```

On obtient :



b. $\boxed{\text{On conjecture que la suite } (u_n)_{n\in[\![10,40]\!]} \text{ est convergente vers } 2}$.

c. Par définition, $\forall n \in \mathbb{N},\ na_n^3 + n^2 a_n - 2 = 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 a_n\left(\dfrac{a_n^2}{n} + 1\right) = 2$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 a_n = \dfrac{2}{\dfrac{a_n^2}{n} + 1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\dfrac{a_n^2}{n} + 1} = 2$.

On en conclut que $\boxed{a_n \sim \dfrac{2}{n^2}}$.