1. Comment résoudre un système par la méthode du pivot partiel de Gauss (triangularisation)

Soit un système de n équations à p inconnues ayant au moins un coefficient non nul.

(1) - on commence par repérer dans la première colonne un pivot, c'est-à-dire un coefficient a_{i1} non nul.
- par échange de lignes, on ramène ce pivot en première ligne, il devient désormais $a_{11} \neq 0$.
- pour tout $i \in [2, n]$, on effectue les opérations élémentaires sur les lignes suivantes :
$L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_i$ (on peut aussi faire $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_i$)

(2) L'inconnue x_1 est ainsi éliminée des lignes L_i pour tout i de $[2, n]$.
Cela fournit un système (S_1) de $n-1$ équations à $p-1$ inconnues.
On recommence le procédé en appliquant la première étape au système (S_1)

(3) Une fois le système mis sous forme échelonnée
- on regarde si les relations de compatibilité éventuelles sont toutes vérifiées simultanément
- si ce n'est pas le cas, le système (S) est impossible
- si c'est le cas, on passe toutes les inconnues secondaires dans le second membre

(4) On obtient un système triangulaire de r équations à r inconnues dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls que l'on résout en remontant depuis la dernière équation principale

(5) On explicite l'ensemble des solutions obtenues en fonction des $p-r$ inconnues secondaires.

2. Comment résoudre un système par la méthode du pivot total de Gauss (diagonalisation)

Soit un système de n équations à p inconnues ayant au moins un coefficient non nul.

(1) - on commence par repérer dans la première colonne un pivot, c'est-à-dire un coefficient a_{i1} non nul.
- par échange de lignes, on ramène le pivot en première ligne. Ce pivot devient désormais $a_{11} \neq 0$.
- pour tout $i \in [2, n]$, on effectue les opérations élémentaires sur les lignes suivantes :
$L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_i$ (on peut aussi faire $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_i$)

(2) L'inconnue x_1 est ainsi éliminée des lignes L_i pour tout i de $[2, n]$.
Cela fournit un système (S_1) de $n-1$ équations à $p-1$ inconnues.
On repère dans la première colonne de (S_1) un pivot, soit a_{i2} non nul avec $i \geqslant 2$.
- par échange de lignes, on ramène ce pivot en première ligne de (S_1), il devient désormais $a_{22} \neq 0$.
- pour tout $i \in [1, n]$, $i \neq 2$, on effectue les opérations élémentaires sur les lignes suivantes :
$L_i \leftarrow a_{22}L_i - a_{i2}L_i$ (on peut aussi faire $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i2}}{a_{22}}L_i$)

(3) L'inconnue x_2 est ainsi éliminée des lignes L_i pour tout i de $[1, n]$, $i \neq 2$.
Cela fournit un système (S_2) de $n-2$ équations à $p-2$ inconnues.
On recommence le procédé en annulant à chaque étape les coefficients de la j-ème colonne situés au dessus et au dessous du pivot placé en a_{jj}.

(4) Une fois le système mis sous forme diagonale
- on regarde si les relations de compatibilité éventuelles sont toutes vérifiées simultanément
- si ce n'est pas le cas, le système (S) est impossible
- si c'est le cas, on passe toutes les éventuelles inconnues secondaires dans le second membre

(5) On obtient un système diagonal de r équations à r inconnues dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls et on résout directement ce système en divisant chaque ligne par son pivot

(6) On explicite l'ensemble des solutions obtenu en fonction des $p-r$ inconnues secondaires.

3. Comment déterminer le rang r d'un système

On applique la méthode du pivot partiel pour obtenir un système échelonné.
Le rang du système est le nombre r de pivots (éléments diagonaux non nuls).

4. Comment obtenir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit compatible

On applique la méthode du pivot partiel pour obtenir un système échelonné.

Le système est compatible si, et seulement si, les relations de compatibilité sont vérifiées simultanément.

5. Comment s'assurer qu'un système (S) de n équations à n inconnues est de Cramer

a. On le résout et on vérifie qu'il admet une unique solution

b. On détermine le rang de (S) et on vérifie qu'il est égal à n

c. Si (S) est triangulaire ou diagonal alors on vérifie que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls

d. Si (S) est associé à une matrice carrée A alors on vérifie que A est inversible

6. Comment résoudre un système à paramètres

- On applique la méthode de résolution de Gauss (pivot partiel ou total) en choisissant à chaque étape un pivot qui ne dépend pas du ou des paramètres.
- Quand cela n'est plus possible, on étudie séparément chaque cas correspondant à une valeur du paramètre qui annule le pivot choisi.
- Pour toutes les autres valeurs du ou des paramètres qui n'annulent pas le pivot, on poursuit la méthode.