Espaces vectoriels

Ce qu'il faut connaître :
-les espaces vectoriels usuels : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}^k(\mathrm{I})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
-la définition d'un sous-espace vectoriel
-la définition de sous-espace vectoriel engendré par une partie et de partie génératrice
-la définition de partie libre et de vecteurs linéairement indépendants
-la notion de rang d'une famille de vecteurs
-la définition de base et de dimension
-les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et leur dimension
-la constitution de la matrice de passage d'une base à une autre base
-le principe de changement de bases et son action sur les coordonnées d'un vecteur

1. Comment montrer qu'une ensemble E a une structure d'espace vectoriel
-On identifie E comme un sous-ensemble d'un espace vectoriel usuel
-On montre que E en est un sous-espace vectoriel (cf 2.)

2. Comment montrer qu'une partie F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E
a. -On vérifie que : $F \subset E$ et que $0_E \in F$
-On vérifie que ; $\forall (u,v) \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u + v \in F$
b. On montre que $F = \mathrm{vect}(A)$ où A est un ensemble de vecteurs de E.

3. Comment montrer qu'une partie F n'est pas un (sous-)espace vectoriel
a. On montre que $0 \notin F$
b. On trouve deux vecteurs u et v de F pour lesquels $u + v \notin F$
c. On trouve un vecteur u de F et un scalaire λ pour lesquels $\lambda u \notin F$

4. Comment déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F
-On cherche une représentation paramétrique de F
-On écrit un vecteur quelconque de F sous la forme d'une combinaison linéaire dont les coefficients sont les paramètres de la représentation précédente
-On repére les vecteurs de la combinaison linéaire, ils constituent une famille génératrice de F

5. Comment montrer qu'une famille $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ engendre un sous-espace vectoriel E
-On vérifie que pour tout i de $\{1, \cdots, p\}$, $u_i \in E$
-On prend un vecteur quelconque u de E et on établit l'existence de $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ tels que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$
•Sur des coordonnées, cela revient à vérifier l'existence de solutions $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ d'un système linéaire
•Si E est un ensemble de fonctions, cela revient à une égalité valable pour toute valeur de la variable. On l'applique pour certaines valeurs ramarquables de la variable pour trouver $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$

6. Comment déterminer le rang r d'une famille $\mathcal{F}$ de E
a. On détermine le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{F}$
b. Si $\begin{cases} E \text{ est de dimension finie } n \\ \mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p\} \\ \text{on connait les coordonnées des vecteurs } u_1,\cdots,u_p \text{ dans une base } \mathcal{B} \text{ de } E \end{cases}$
alors -on construit la matrice P, d'ordre (n,p),
dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$
-on détermine le rang de P en l'échelonnant, $r = rg(P)$

7. Comment étudier l'indépendance linéaire d'une famille $\mathcal{F}$ de E

a. Si $\mathcal{F} = \{u\}$ alors $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ $u \neq 0_E$

b. Si $\mathcal{F} = \{u, v\}$ alors $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ u et v ne sont pas colinéaires

c. Si $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p\}$. $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ $rg(\mathcal{F}) = p$

d. Si $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p\}$, on considère $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E$.

En utilisant le même principe qu'en **5.**, $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ $\left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0 \right]$

8. Comment trouver des relations de dépendance linéaire entre les vecteurs d'une famille $\mathcal{F}$ de E

Si $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ est une partie liée de E alors on considère $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \mid \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E$.

Les solutions $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \neq (0, \cdots, 0)$ donnent les relations de dépendance entre les $u_1, \cdots, u_p$.

9. Comment déterminer une base d'un sous-espace vectoriel E

a. -On cherche une famille génératrice $\mathcal{F}$ de E (cf **4.**)

-On en extrait une base en retirant les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres (cf **8.**)

b. Si E est de dimension finie n, on cherche une famille génératrice $\mathcal{F}$ de E (cf **4.**). Si $card\mathcal{F} = n$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

10. Comment démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base d'un sous-espace vectoriel E

a. On montre que $\mathcal{F}$ engendre E (cf **5.**) et que $\mathcal{F}$ est une partie libre (cf **7.**)

b. Si E est de dimension finie n et $card\mathcal{F} = n$ alors on montre que $rg(\mathcal{F}) = n$ (cf **6.**)

c. Si E est de dimension finie n et $card\mathcal{F} = n$ alors on montre que $\mathcal{F}$ engendre E (cf **5.**)

d. Si $\begin{cases} E \text{ est de dimension finie } n \\ \mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p\} \\ \text{on connait les coordonnées des vecteurs } u_1, \cdots, u_p \text{ dans une base } \mathcal{B} \text{ de } E \end{cases}$

alors -on construit la matrice P, d'ordre (n,p),

dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$

-on détermine le rang de P en l'échelonnant. F est une base de E $\Leftrightarrow$ P est inversible

(Dans ce cas, P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$)

e. On montre que tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$

11. Comment déterminer les coordonnées d'un vecteur u dans une base $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$

a. On cherche les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ (cf **5.**)

b. Si on connait les coordonnées X de u dans une base initiale $\mathcal{I}$, on pose P la matrice de passage de la base $\mathcal{I}$ à la base $\mathcal{B}$, on calcule P^{-1} puis le produit $X' = P^{-1}X$.