Devoir Surveillé 1 - BCPST 2

durée : 2 heures
Documents et calculatrices non autorisés.

Aucune réponse non justifiée ne sera prise en compte dans la notation. Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.
L'énoncé comporte deux exercices indépendants.

Exercice 1 : Nombres complexes

L'objectif de cet exercice est de présenter deux méthodes de calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Dans la suite, on pose $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

1. *Méthode 1.*
   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = -1$ et vérifier que les solutions s'écrivent sous la forme $-1, \mathrm{e}^{i\theta_1}, \mathrm{e}^{-i\theta_1}, \mathrm{e}^{i\theta_2}, \mathrm{e}^{-i\theta_2}$ où l'on exprimera θ_1 et θ_2 à l'aide de α.
   (b) Vérifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^5 + 1 = (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$.
   En déduire que les complexes $\mathrm{e}^{i\theta_1}, \mathrm{e}^{-i\theta_1}, \mathrm{e}^{i\theta_2}, \mathrm{e}^{-i\theta_2}$ sont solutions de $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

   Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $Z = z + \dfrac{1}{z}$.

   (c) Simplifier Z pour $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
   (d) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:
   $$Z^2 - Z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$
   (e) Justifier alors que $2\cos(\alpha)$ est solution de $Z^2 - Z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\alpha)$.

2. *Méthode 2.*
   Soit s et p les réels définis par :
   $$s = \cos(\alpha) + \cos(3\alpha) \quad \text{et} \quad p = \cos(\alpha)\cos(3\alpha).$$
   (a) Donner des relations simples entre $\cos(4\alpha)$ et $\cos(\alpha)$, entre $\sin(4\alpha)$ et $\sin(\alpha)$, puis entre $\cos(3\alpha)$ et $\cos(2\alpha)$.
   (b) Montrer que pour tous réels a et b :
   $$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b).$$
   (c) Utiliser la question 2.(b) pour montrer que $s = 2\cos(\alpha)\cos(2\alpha)$, puis que $s = \dfrac{\sin(4\alpha)}{2\sin(\alpha)}$.
   En déduire la valeur de s.
   (d) Utiliser la question 2.(b) pour montrer que $p = \dfrac{1}{2}(\cos(2\alpha) + \cos(4\alpha))$.
   En déduire la valeur de p.
   (e) Connaissant s et p, déterminer les valeurs possibles de $\cos(\alpha)$ et $\cos(3\alpha)$. Retrouver la valeur de $\cos(\alpha)$.

Exercice 2 : Analyse

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
   On pourra commencer par chercher un développement limité de $\frac{1}{f}$.

(b) En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0.

3. (a) Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire quant à la courbe $\mathscr{C}$?

   (b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $-\infty$ et en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

   (c) Déterminer la limite de $f(x) + x$ quand x tend vers $-\infty$.
En déduire l'équation de l'asymptote éventuelle à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$. Préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

4. (a) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

où g est une fonction à déterminer.

   (b) Étudier les variations de la fonction g.
En déduire les variations de la fonction f et donner son tableau de variations.

5. (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
On note $\mathscr{C}'$ la courbe de f^{-1} dans le repère orthonormé considéré.

   (b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $(f^{-1})'(1)$.

   (c) Déterminer les éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

   (d) Tracer les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ en faisant apparaître tous les éléments qui précèdent (tangentes, asymptotes, etc.)