# Corrigé du Devoir Surveillé 1 - BCPST 2

## Exercice 1 : Nombres complexes

1. *Méthode 1.*

   (a) On constate que 0 n'est pas solution. On recherche donc les solutions sous la forme $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^5 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^5\,\mathrm{e}^{5i\theta} = \mathrm{e}^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\theta = \pi + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \alpha + \dfrac{2k\pi}{5}, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

   En prenant $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, on trouve les cinq solutions distinctes suivantes :

$$\boxed{-1, e^{i\alpha}, \mathrm{e}^{-i\alpha}, \mathrm{e}^{3i\alpha}, \mathrm{e}^{-3i\alpha}.}$$

   (b) En développant le membre de droite on trouve bien que

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{C},\; z^5 + 1 = (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1).}$$

   Les complexes $e^{i\alpha}, \mathrm{e}^{-i\alpha}, \mathrm{e}^{3i\alpha}, \mathrm{e}^{-3i\alpha}$ sont solutions de $z^5 + 1 = 0$, donc de $(z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$. Ces complexes n'étant pas égaux à $-1$, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\alpha}, \mathrm{e}^{-i\alpha}, \mathrm{e}^{3i\alpha}, \mathrm{e}^{-3i\alpha} \text{ sont solutions de } z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.}$$

   (c) Soit $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$Z = z + \frac{1}{z} = \mathrm{e}^{i\theta} + \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad \text{d'après les formules d'Euler.}$$

   (d) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ :

$$\begin{aligned} Z^2 - Z - 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - z - \frac{1}{z} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{z^2}(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C}^*,\; Z^2 - Z - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.}$$

   (e) D'après la question 1.(b), $z = \mathrm{e}^{i\alpha}$ est solution de $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Les questions 1.(c) et 1.(d) assurent alors que $Z = 2\cos(\alpha)$ est solution de $Z^2 - Z - 1 = 0$.

   Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\Delta = 5$, et les solutions sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Comme $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(\alpha) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

2. *Méthode 2.*

   (a) On constate que $5\alpha = \pi$, donc $4\alpha = \pi - \alpha$ et $3\alpha = \pi - 2\alpha$.

$$\boxed{\text{Donc } \cos(4\alpha) = -\cos(\alpha),\ \sin(4\alpha) = \sin(\alpha) \text{ et } \cos(3\alpha) = -\cos(2\alpha).}$$

   (b) Soit $a$ et $b$ des réels :

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

$$\boxed{\forall\, a, b \in \mathbb{R},\; \cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b).}$$



   (c) En utilisant la question 2.(b) avec $a = \alpha$ et $b = 2\alpha$, on trouve $s = 2\cos(\alpha)\cos(2\alpha)$. D'autre part,

$$\frac{\sin(4\alpha)}{2\sin(\alpha)} = \frac{2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)}{2\sin(\alpha)} = \frac{4\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(2\alpha)}{2\sin(\alpha)} = 2\cos(\alpha)\cos(2\alpha) = s.$$

   D'après la question 2.(a),

$$\boxed{s = \frac{1}{2}}$$

   (d) En utilisant la question 2.(b) avec $a = 3\alpha$ et $b = \alpha$, on trouve $p = \dfrac{1}{2}(\cos(2\alpha) + \cos(4\alpha))$.
   D'après la question 2.(a),

$$\boxed{p = -\frac{s}{2} = -\frac{1}{4}.}$$

   puis que $p = -\dfrac{s}{2}$.

   (e) Les réels $\cos(\alpha)$ et $\cos(3\alpha)$ sont les solutions de l'équation $(x - \cos(\alpha))(x - \cos(3\alpha)) = 0$.
   Or :

$$(x - \cos(\alpha))(x - \cos(3\theta_3)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - sx + p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

   Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\Delta = 20$, et les solutions sont $\dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{8}$ c'est-à-dire $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$.
   Comme $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(\alpha) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On retrouve le fait que } \cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

## Exercice 2 : Analyse

1. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   De plus, comme $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc $f$ est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

2. (a) Pour $x \neq 0$, $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)}{x} = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + o_0(x^2)$.

   On a alors $f(x) = \dfrac{1}{1+u}$ où $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + o_0(x^2)$. Comme $u$ tend bien vers 0 et $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o_0(u^2)$.

   Donc $f(x) = 1 - \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6}\right) + \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6}\right)^2 + o_0(x^2)$.

$$\boxed{\text{Le développement limité de } f \text{ à l'ordre 2 en 0 est } f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)}.$$

   (b) La fonction $f$ est continue en 0 et admet un développement limité à l'ordre deux en 0, donc elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0, } f'(0) = -\frac{1}{2} \text{ et } \mathscr{C} \text{ admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation } y = 1 - \frac{x}{2}.}$$

   Enfin, comme $f(x) - \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{12} \geqslant 0$,

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0}}.$$

3. (a) On a : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$. Donc, par croissances comparées, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C} \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote horizontale d'équation } y = 0.}$$

   (b) Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1$, on en déduit que :

$$\boxed{f(x) \underset{-\infty}{\sim} -x \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.}$$

(c) Pour tout $x$ non nul, $f(x) + x = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$ et, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ par coissances comparées,

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = 0 \text{ donc } \mathscr{C} \text{ admet en } -\infty \text{ une asymptote d'équation } y = -x.}$$

Enfin, pour $x < 0$, $e^x - 1 < 0$, donc $\dfrac{xe^x}{e^x - 1} > 0$. On en conclut que :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ est au-dessus de son asymptote au voisinage de } -\infty}.$$

4. (a) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions dérivables. De plus,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} \quad \text{où} \quad g(x) = e^x - 1 - xe^x.}$$

(b) La fonction $g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produits de telles fonctions, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -xe^x.$$

$$\boxed{\text{On en déduit } g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |

Comme $g(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) < 0$ et puisque $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$ et $(e^x - 1)^2 > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) < 0$.

D'autre part, on a montré à la question 2.(b) que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Finalement ,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) < 0.$$

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

5. (a) La fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } f(\mathbb{R}) = ]0, +\infty[.}$$

(b) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Donc } f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, étant donné que $f(0) = 1$, on a $f^{-1}(1) = 0$ et

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} \underset{2.(b)}{=} -2.$$

$$\boxed{(f^{-1})'(1) = -2.}$$

(c) Les courbes de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ étant symétriques l'une de l'autre part rapport à la droite d'équation $y = x$, leurs points d'intersection se situent sur la droite d'équation $y = x$. On recherche donc les réels $x$ pour lesquels $f(x) = x$. Comme $f(0) = 1$ et pour tout réel non nul $x$, $f(x) = x \iff \mathrm{e}^x - 1 = 1 \iff \mathrm{e}^x = 2$.

$$\boxed{\text{Les courbes } \mathscr{C} \text{ et } \mathscr{C}' \text{ s'intersectent au point de coordonnées } (\ln(2), \ln(2)).}$$

(d)