Devoir Surveillé 2 - BCPST 2

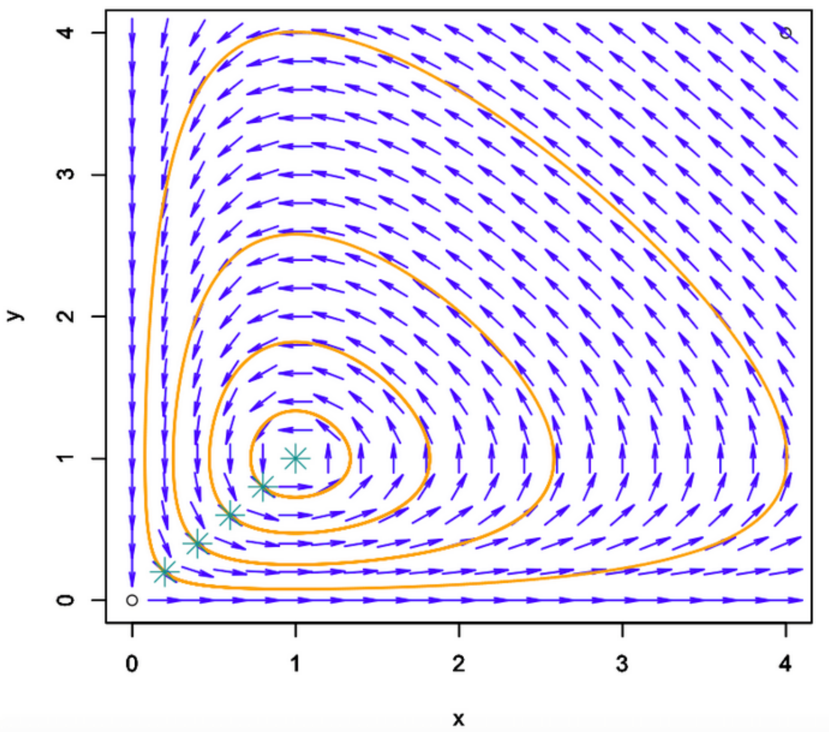
durée : 3 heures
Documents et calculatrices non autorisés.

Aucune réponse non justifiée ne sera prise en compte dans la notation. Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.

Dans le cadre de l'étude d'une espèce de lièvres, on souhaite modéliser la dynamique d'évolution temporelle de cette population en tenant compte d'une espèce prédatrice : le lynx.
L'objectif du sujet est d'étudier le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra et de comparer différentes méthodes de résolution numérique de ce système différentiel.

Le sujet se compose de 2 parties largement indépendantes.

- La **Partie I** est consacrée à l'étude du modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra.
- La **Partie II** est consacrée à l'étude et la simulation informatique des méthodes d'Euler et de Heun.



Exemple de champ de vecteurs pour un système différentiel de Lotka-Volterra
d'inconnues x (proies) et y (prédateurs)

Partie I - Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Dans cette partie, on souhaite modéliser l'évolution conjointe de deux populations : la population de lièvres, qui constituent des proies et une population de lynx, qui sont des prédateurs des lièvres. Pour tout réel positif, t, on note $X(t)$ l'effectif des proies et $Y(t)$ l'effectif des prédateurs à l'instant t. On suppose que les fonctions X et Y sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et on modélise l'évolution des effectifs par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = rX - pXY \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = -mY + qXY \end{cases} \tag{1}$$

où r, p, m et q sont des constantes positives représentant respectivement :

- le taux de reproduction intrinsèque des proies (r),
- le taux de mortalité des proies due aux prédateurs rencontrés (p),
- le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs (m),
- le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées (q).

1. (a) Que devient le système (1) s'il n'y a pas de lynx, c'est-à-dire $Y(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$? Comment évolue alors la population de lièvres ?

   (b) Que devient le système (1) s'il n'y a pas de lièvres, c'est-à-dire si $X(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$? Comment évolue alors la population de lynx ?

2. Dans cette question uniquement, on admet qu'une solution de (1) telle que $X(0) = X_0 > 0$ et $Y(0) = Y_0 > 0$ est périodique de période $T > 0$ et telle que X et Y ne s'annulent pas.

   (a) Calculer
   $$\int_0^T \frac{X'(t)}{X(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^T \frac{Y'(t)}{Y(t)}\,\mathrm{d}t.$$

   (b) On appelle *valeurs moyennes* des fonctions X et Y, les réels notés $\langle X \rangle$ et $\langle Y \rangle$ définis par :
   $$\langle X \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \langle Y \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t)\,\mathrm{d}t.$$
   En utilisant le système (1), calculer les intégrales de la question précédente d'une autre manière et en déduire que :
   $$\langle X \rangle = \frac{m}{q} \quad \text{et} \quad \langle Y \rangle = \frac{r}{p}.$$

   (c) Quelle serait l'influence de la chasse aux lièvres (pratiquée par l'homme) sur les populations de lièvres et de lynx ?

3. On pose $s = rt$, $x(s) = \dfrac{q}{r}X(t)$ et $y(s) = \dfrac{p}{r}Y(t)$.

   Montrer que les fonctions x et y sont dérivables et vérifient le système d'équations différentielles
   $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x - xy \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -\alpha y + xy \end{cases} \tag{2}$$
   où α est une constante à déterminer.

On appelle *point d'équilibre* du système (2) tout couple $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x^* - x^*y^* = 0 \\ -\alpha y^* + x^*y^* = 0 \end{cases}$$

4. (a) Montrer que le système (2) possède deux points d'équilibre que l'on explicitera.
   (b) Que représentent ces points d'équilibre en termes de dynamique des populations ?
   (c) Donner une interprétation biologique des points d'équilibre obtenus.

5. Pour $\lambda > 0$ fixé, on introduit la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_\lambda(u) = u - \lambda \ln u.$$

   (a) Étudier les variations de f_λ.
   En déduire que pour tout $u > 0$, $f_\lambda(u) \geqslant \lambda(1 - \ln \lambda)$ et $f_\lambda(u) = \lambda(1 - \ln \lambda)$ si, et seulement si, $u = \lambda$.

   (b) Soit $M > \lambda(1 - \ln \lambda)$. Montrer qu'il existe d'uniques réels a et b avec $0 < a \leqslant b$, tels que $f_\lambda(u) \leqslant M$ si, et seulement si, $a \leqslant u \leqslant b$.

On définit maintenant, pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$V(x, y) = f_\alpha(x) + f_1(y) = x - \alpha \ln x + y - \ln y. \tag{3}$$

6. Montrer que, pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, $V(x, y) \geqslant 1 + \alpha(1 - \ln \alpha)$ et que de plus, l'équation $V(x, y) = 1 + \alpha(1 - \ln \alpha)$ admet une unique solution que l'on explicitera.

Dans toute la suite de cette partie, on considère une solution $(x(\cdot), y(\cdot))$ de (2) avec des conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$ telles que $(x_0, y_0) \neq (\alpha, 1)$. On suppose que x et y sont à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+$.
On appelle *énergie de la solution* $(x(\cdot), y(\cdot))$, la fonction E définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, s \geqslant 0, \quad E(s) = V(x(s), y(s)).$$

7. (a) Justifier que E est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que E est constante sur $\mathbb{R}_+$. Interpréter.
   Dans la suite, on notera C la constante telle que : $\forall\, s \geqslant 0,\ E(x(s), y(s)) = C$.
   (b) Montrer que, pour tout $s \geqslant 0$, on a :

$$f_\alpha(x(s)) \leqslant C - 1 \quad \text{et} \quad f_1(y(s)) \leqslant C - \alpha(1 - \ln \alpha)$$

   où la constante α est définie à la question 3. et les fonctions f_α et f_1 sont définies à la question 5.
   (c) En déduire qu'il existe a, b, c, d avec $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d$ tels que :

$$\forall\, s \geqslant 0, \quad a \leqslant x(s) \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant y(s) \leqslant d.$$

8. En s'appuyant sur les questions précédentes, répondre en justifiant aux questions suivantes :
   (a) Les populations de proies et de prédateurs peuvent-elles s'éteindre ? Peuvent-elles devenir arbitrairement grandes ?
   (b) Les populations de proies et de prédateurs peuvent-elles s'arrêter d'évoluer ?

Partie II - Résolution numérique du système différentiel

Cette partie consiste à mettre en place des programmes informatiques pour simuler les différents modèles considérés dans le sujet. Bien que cette partie soit largement indépendante de la partie précédente, il est vivement conseillé de les avoir lues. Les programmes sont à rédiger en langage Python. Avant chaque algorithme, on écrira brièvement le raisonnement suivi et la formule qu'il est censé calculer.

On met en place une résolution numérique du système (2) par la méthode d'Euler. On se fixe un petit intervalle de temps $h > 0$. À partir d'une condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on construit une suite de points de $\mathbb{R}^2$, notée (x_k, y_k) pour $k \in \mathbb{N}$, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k + h\left(x_k - x_k y_k\right) \\ y_{k+1} = y_k + h\left(-\alpha y_k + x_k y_k\right) \end{array} \right. \tag{4}$$

telle que (x_k, y_k) est une approximation d'une solution de (2) au temps $t_k = hk$.
On admet que les suites (x_k) et (y_k) sont ainsi bien définies et à termes strictement positifs. On pose alors

$$v_k = V\left(x_k, y_k\right),$$

où la fonction V est définie par (3).

1. Montrer que, pour k entier naturel,

$$v_{k+1} - v_k = hx_k - \ln(1 + h(x_k - \alpha)) - \alpha h y_k - \alpha \ln(1 + h(1 - y_k)).$$

2. On rappelle que $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour tout réel $x > -1$, avec égalité, si et seulement si, $x = 0$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, $v_{k+1} - v_k \geqslant 0$.
   (b) Montrer que : (v_k) est constante si, et seulement si, les suites (x_k) et (y_k) sont constantes.

3. Interpréter au vu de la **Partie I**.7. La méthode d'Euler est-elle ici satisfaisante ?

4. (a) Écrire une fonction d'entête `lievre(x,y)` qui renvoie $x - xy$ et une fonction d'entête `lynx(x,y)` qui renvoie $-\alpha y + xy$. La constante `alpha` est supposée être préalablement définie dans une variable globale.
   (b) On ajoute au code précédent la fonction suivante, où les arguments `x0, y0, T` et `h` définissent respectivement x_0, y_0, l'intervalle d'étude $[0, T]$ et le pas $h > 0$ de la méthode d'Euler :

```python
def resol1(x0, y0, T, h):
    x = x0; y = y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        ------
    return Lt,Lx,Ly
```

   Compléter les lignes manquantes dans la boucle, afin que les listes `Lx` et `Ly` contiennent respectivement les x_k et y_k définis par l'équation (8) et que la liste `Lt` contienne les t_k.
   (c) On ajoute au code précédent :

```python
import math as m

def V(x, y) :
    return x-alpha*m.log (x)+y-m.log (y)
```

   Écrire une fonction d'entête `traceV1(x0, y0, T, h)` qui effectue la représentation graphique des valeurs v_k en ordonnées, en fonction des valeurs t_k en abscisses.

5. On cherche dorénavant à effectuer une résolution numérique avec une autre méthode, appelée méthode de Heun, où la relation de récurrence définissant les x_k et y_k est :

$$\begin{cases} u_k = x_k + h\left(x_k - x_k y_k\right) \\ w_k = y_k + h\left(-a y_k + x_k y_k\right) \\ x_{k+1} = x_k + \dfrac{h}{2}\left(x_k - x_k y_k + u_k - u_k w_k\right) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\left(-a y_k + x_k y_k - a w_k + u_k w_k\right) \end{cases} \tag{5}$$

   (a) Écrire une fonction d'entête `resol2(x0,y0,T,h)` analogue de `resol1` utilisant la méthode de Heun.

   (b) On suppose que, pour la méthode de Heun, on dispose d'une fonction `traceV2` analogue à la fonction `traceV1`. L'exécution de `traceV1` et `traceV2` donne les courbes présentées en figure 2.
   En quoi peut-on considérer que la méthode Heun est une amélioration de la méthode d'Euler ?

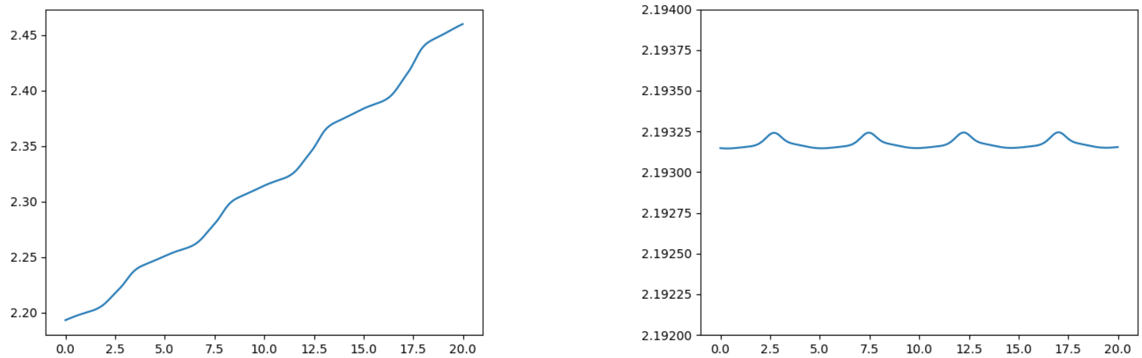


figure 2 - Tracés donnés par `traceV1` (à gauche) et par `traceV2` (à droite) pour $x_0 = 1$ et $y_0 = 0.5$

6. On définit une fonction qui permet d'afficher les courbes des solutions approchées par la méthode de Heun des fonctions x et y dont les valeurs de x_0 et y_0 sont données.

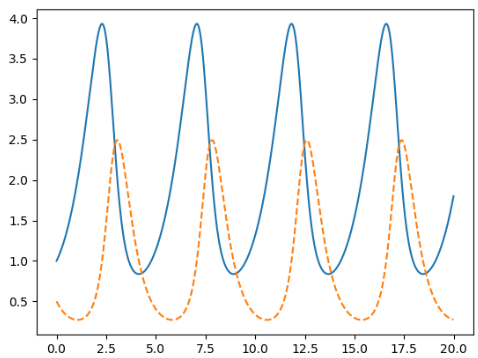


figure 3 - Tracé donné par `trace_pop_2` pour $x_0 = 1$ et $y_0 = 0.5$

   (a) Identifier (avec justifications), en lien avec la modélisation effectuée, chacune des deux courbes.

   (b) Interpréter l'évolution des dynamiques de population des lièvres et des lynx obtenues.