Corrigé du Devoir Surveillé 2 - BCPST 2

Partie I - Modèle proie-prédateur

1. (a) S'il n'y a pas de lynx, c'est-à-dire $Y(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$, le système devient :

$$\begin{cases} X' = rX \\ Y' = 0 \end{cases}$$

La population de lièvres suit alors le modèle de Malthus, elle va donc croître de manière exponentielle.

(b) S'il n'y a pas de lièvres, c'est-à-dire si $X(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$? , le système devient :

$$\begin{cases} X' = 0 \\ Y' = -mY \end{cases}$$

La population de lynx va donc décroître de manière exponentielle et s'éteindre.

2. (a) On a :

$$\int_0^T \frac{X'(t)}{X(t)}\,\mathrm{d}t = \big[\ln(X(t))\big]_0^T = \ln(X(T)) - \ln(X(0)) = 0$$

car X est supposée périodique de période T. De la même manière, on trouve

$$\int_0^T \frac{Y'(t)}{Y(t)}\,\mathrm{d}t = 0.$$

(b) D'après le système (1),

$$\int_0^T \frac{X'(t)}{X(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^T r - pY(t)\,\mathrm{d}t = rT - pT\langle Y\rangle \underset{2.(a)}{=} 0.$$

On en déduit que $\langle Y\rangle = \dfrac{r}{p}$. De la même manière, on montrer que $\langle X\rangle = \dfrac{m}{q}$.

$$\boxed{\langle X\rangle = \frac{m}{q} \quad \text{et} \quad \langle Y\rangle = \frac{r}{p}.}$$

(c) Si l'homme pratique la chasse aux lièvres, alors le taux de mortalité p des lièvres va augmenter. D'après le modèle considéré, le nombre moyen de lièvres sera le même qu'en l'absence de chasse, mais le nombre moyen de lynx sera inférieur. Ainsi, la chasse aux lièvres va entrainer une baisse du nombre moyen de lynx.

3. Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$,

$$x(s) = \frac{q}{r}X\left(\frac{s}{r}\right) \quad \text{et} \quad y(s) = \frac{p}{r}Y\left(\frac{s}{r}\right).$$

Les fonction x et y sont bien définies sur $\mathbb{R}_+$ et dérivables en tant que composées de fonctions dérivables :

$$\begin{aligned} \forall\, s \in \mathbb{R}_+,\quad x'(s) &= \frac{q}{r^2}X'\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{q}{r}X\left(\frac{s}{r}\right) - \frac{q}{r}X\left(\frac{s}{r}\right) \times \frac{p}{r}Y\left(\frac{s}{r}\right) = x(s) - x(s)y(s) \\ y'(s) &= \frac{p}{r^2}Y'\left(\frac{s}{r}\right) = -\frac{m}{r} \times \frac{p}{r}Y\left(\frac{s}{r}\right) + \frac{q}{r}X\left(\frac{s}{r}\right) \times \frac{p}{r}Y\left(\frac{s}{r}\right) = -\frac{m}{r}y(s) + x(s)y(s) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc les fonctions } x \text{ et } y \text{ vérifient le système (2) en posant } \alpha = \frac{m}{r}.}$$

4. (a) Soit $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} x^* - x^*y^* = 0 \\ -\alpha y^* + x^*y^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^*(1-y^*) = 0 \\ (-\alpha + x^*)y^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = 0 \quad \text{ou} \quad y^* = 1 \\ x^* = \alpha \quad \text{ou} \quad y^* = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le système (2) possède deux points d'équilibre : } (0,0) \text{ et } (\alpha, 1).}$$

(b) Ces points d'équilibre représentent des valeurs pour lesquelles les fonctions X et Y associée sont constantes. En termes de dynamique des populations, cela signifie que les populations de lièvres et lynx sont constantes (à l'équilibre).

(c) Le point d'équilibre $(0,0)$ correspond à des populations de lièvres et lynx nulles, c'est-à-dire des populations éteintes. Le point d'équilibre $(\alpha, 1)$ correspond à X constante égale à $\frac{m}{q}$ et Y constante égale à $\frac{r}{p}$, ce qui signifie que les deux populations de proies et prédateurs sont à l'équilibre selon les taux r, p, m et q considérés.

5. (a) Soit $\lambda > 0$. La fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall\, u > 0, \quad f_\lambda'(u) = 1 - \frac{\lambda}{u} = \frac{u-\lambda}{u}.$$

De plus, $\lim\limits_{u\to 0^+} f_\lambda(u) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} f_\lambda(u) = \lim\limits_{u\to+\infty} u\left(1 - \lambda\dfrac{\ln u}{u}\right) = +\infty$ par croissances comparées.

x	0		λ		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	$\searrow$	$\lambda(1-\ln\lambda)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{\text{Pour tout } u > 0,\ f_\lambda(u) \geqslant \lambda(1-\ln\lambda) \text{ et } f_\lambda(u) = \lambda(1-\ln\lambda) \text{ si, et seulement si, } u = \lambda.}$

(b) Soit $M > \lambda(1-\ln\lambda)$.

- La fonction f_λ est continue et strictement décroissante sur $]0,\lambda[$, donc elle réalise une bijection de $]0,\lambda[$ sur $f(]0,\lambda[) =]\lambda(1-\ln\lambda), +\infty[$. Or $M \in f(]0,\lambda[)$, donc il existe un unique $a \in]0,\lambda[$ tel que $f_\lambda(a) = M$.
- De la même manière, f_λ réalise une bijection de $[\lambda, +\infty[$ sur $f_\lambda([\lambda,+\infty[) = [\lambda(1-\ln\lambda), +\infty[$. Étant donné que $M \in f([\lambda,+\infty[)$, il existe un unique $b \in\ [\lambda, +\infty[$ tel que $f_\lambda(b) = M$.

D'après le tableau de variations de f_λ,

$\boxed{\text{il existe d'uniques réels } a \text{ et } b \text{ avec } 0 < a \leqslant b, \text{ tels que } f_\lambda(u) \leqslant M \text{ si, et seulement si, } a \leqslant u \leqslant b.}$

6. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

$$V(x,y) = f_\alpha(x) + f_1(y) \geqslant \alpha(1-\ln\alpha) + 1 \quad \text{d'après 5.(a)}$$

avec égalité, si, et seulement si,

$$f_\alpha(x) = \alpha(1-\ln\alpha) \quad \text{et} \quad f_1(y) = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = \alpha \quad \text{et} \quad y = 1$$

$\boxed{\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ V(x,y) \geqslant 1 + \alpha(1-\ln\alpha) \text{ et l'équation } V(x,y) = 1+\alpha(1-\ln\alpha) \text{ admet } (\alpha,1) \text{ pour unique solution.}}$

7. (a) Pour tout $s \geqslant 0$, $E(s) = V(x(s), y(s)) = x(s) - \alpha\ln x(s) + y(s) - \ln y(s)$.
E est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable en tant que somme et composée de fonctions dérivables :

$$\begin{aligned}\forall\, s \geqslant 0, \quad E'(s) &= x'(s) - \alpha\frac{x'(s)}{x(s)} + y'(s) - \frac{y'(s)}{y(s)} \\ &= x(s) - x(s)y(s) - \alpha(1-y(s)) - \alpha y(s) + x(s)y(s) - (-\alpha + x(s)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbb{R}_+ \text{ étant un intervalle, } E \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+. \text{ L'énergie de la solution est conservée.}}$

(b) Soit $s \geqslant 0$.

$$V(x(s), y(s)) = f_\alpha(x(s)) + f_1(y(s)) = C.$$

D'après la question 5.(a),

$$f_\alpha(x(s)) \geqslant \alpha(1-\ln\alpha) \quad \text{et} \quad f_1(y(s)) \geqslant 1.$$

$\boxed{\text{Donc : pour tout } s \geqslant 0,\ f_\alpha(x(s)) \leqslant C - 1 \text{ et } f_1(y(s)) \leqslant C - \alpha(1-\ln\alpha).}$

(c) D'après la question 7.(b),

$$\forall\, s \geqslant 0, \quad f_\alpha(x(s)) \leqslant C - 1 \quad \text{et} \quad f_1(y(s)) \leqslant C - \alpha(1-\ln\alpha).$$

D'après la question 6, cette constante est strictement supérieure à $1 + \alpha(1-\ln\alpha)$ car $(x_0, y_0) \neq (\alpha, 1)$.
En posant $M_1 = C - 1$, on a :

$$M_1 > \alpha(1-\ln\alpha) \quad \text{et} \quad \forall\, s \geqslant 0, \quad f_\alpha(x(s)) \leqslant M_1.$$

La question 5.(a) assure qu'il existe des réels a et b tels que : $0 < a \leqslant b$ et $\forall\, s \geqslant 0,\ a \leqslant x(s) \leqslant b$.

De la même manière, en posant $M_2 = C - \alpha(1 - \ln \alpha)$, on a :

$$M_2 > 1 \quad \text{et} \quad \forall\, s \geqslant 0, \quad f_1(y(s)) \leqslant M_2.$$

La question 5.(a) assure qu'il existe des réels c et d tels que : $0 < c \leqslant d$ et $\forall\, s \geqslant 0,\ c \leqslant y(s) \leqslant d$.

$$\boxed{\text{Il existe } a, b, c, d \text{ avec } 0 < a \leqslant b \text{ et } 0 < c \leqslant d \text{ tels que : } \forall\, s \geqslant 0,\ a \leqslant x(s) \leqslant b \text{ et } c \leqslant y(s) \leqslant d.}$$

8. (a) La question précédente montre que les variables x et y sont bornées.
   Les réels a et c étant non nuls, on en déduit que, selon ce modèle, les populations de proies et de prédateurs ne peuvent pas s'éteindre.
   Les fonctions x et y étant majorées, les populations de proies et de prédateurs ne peuvent pas devenir arbitrairement grandes.

   (b) À moins que les populations de proies et prédateurs ne soient déjà à l'état d'équilibre ($x = \alpha$ et $y = 1$), les populations de proies et de prédateurs ne vont pas rester constantes car $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$.

Partie II - Résolution numérique du système différentiel

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
v_{k+1} - v_k &= x_{k+1} - \alpha \ln x_{k+1} + y_{k+1} - \ln y_{k+1} - x_k + \alpha \ln x_k - y_k + \ln y_k \\
&= x_k + h(x_k - x_k y_k) - \alpha \ln(x_k + h(x_k - x_k y_k)) + y_k + h(-\alpha y_k + x_k y_k) - \ln(y_k + h(-\alpha y_k + x_k y_k)) \\
&\quad - x_k + \alpha \ln x_k - y_k + \ln y_k \\
&= h x_k - \alpha \ln x_k - \alpha(1 + h(1 - y_k)) - \alpha h y_k - \ln y_k - \ln(1 + h(x_k - \alpha)) + \alpha \ln(x_k) + \ln y_k \\
&= h x_k - \ln(1 + h(x_k - \alpha)) - \alpha h y_k - \alpha \ln(1 + h(1 - y_k)).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel k, } v_{k+1} - v_k = h x_k - \ln(1 + h(x_k - \alpha)) - \alpha h y_k - \alpha \ln(1 + h(1 - y_k)).}$$

2. On rappelle que $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour tout réel $x > -1$, avec égalité, si et seulement si, $x = 0$.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.
   Par hypothèse, x_k et x_{k+1} sont strictement positifs, or $x_{k+1} = x_k(1 + h\,(1 - y_k))$, donc $1 + h(x_k - \alpha) > 0$.
   De même, y_k et y_{k+1} sont strictement positifs, donc $1 + h(1 - y_k) > 0$.
   D'après l'inégalité rappelée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\ln(1 + h(x_k - \alpha)) &\leqslant h(x_k - \alpha) \\
\ln(1 + h(1 - y_k)) &\leqslant h(1 - y_k)
\end{aligned}$$

   Donc,

$$\begin{aligned}
v_{k+1} - v_k &= h x_k - \ln(1 + h(x_k - \alpha)) - \alpha h y_k - \alpha \ln(1 + h(1 - y_k)) \\
v_{k+1} - v_k &\geqslant h x_k - h(x_k - \alpha) - \alpha h y_k - \alpha h(1 - y_k) = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k,\ v_{k+1} - v_k \geqslant 0.}$$

   (b) On raisonne par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
(v_k) \text{ est constante} &\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} - v_k = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \ln(1 + h(x_k - \alpha)) = h(x_k - \alpha) \quad \text{et} \quad \ln(1 + h(1 - y_k)) = h(1 - y_k) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad h(x_k - \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad h(1 - y_k) = 0 \quad \text{d'après le résultat rappelé dans l'énoncé} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_k = \alpha \quad \text{et} \quad y_k = 1 \quad \text{car } h \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x_k) \text{ et } (y_k) \text{ sont constantes}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(v_k) \text{ est constante si, et seulement si, les suites } (x_k) \text{ et } (y_k) \text{ sont constantes.}}$$

3. Dans la question 7.(a) de la **Partie I**, on a montré que pour un couples de solution x et y, l'énergie de la solution $E : s \mapsto V(x(s), y(s))$ est constante. Le calcul précédent montre qu'en utilisant la méthode d'Euler, que $(V(x_k, y_k))$ n'est constante que si la solution considérée est la solution constante correspondant au point d'équilibre $(\alpha, 1)$.

$$\boxed{\text{La méthode d'Euler n'est donc pas satisfaisante en termes de conservation de l'énergie de la solution considérée.}}$$

4. (a)

```python
def lievre(x, y):
    return x - x*y

def lynx(x,y):
    return -alpha*y + x*y
```

(b)

```
def resol_1(x0, y0, T, h):
    t = 0
    x = x0; y = y0
    Lt = [t]
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    while t+h <= T:
        t, x, y = t+h, x+h*lievre(x,y), y+h*lynx(x,y)
        Lt.append(t)
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return Lt,Lx,Ly
```

(c)

```
def V(x, y) :
    return x-alpha*m.log (x)+y-m.log (y)

def traceV1(x0, y0, T, h):
    Lt, Lx, Ly = resol_1(x0, y0, T, h)
    Lv = [V(Lx[k], Ly[k]) for k in range(len(Lx))]
    plt.plot(Lt, Lv)
    plt.show()
```

5. (a)

```
def resol_2(x0, y0, T, h):
    t = 0
    x = x0; y = y0
    Lt = [t]
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    while t+h <= T:
        t = t+h
        u, w = x+h*lievre(x,y), y+h*lynx(x,y)
        x, y = x+h/2*(lievre(x,y)+lievre(u,w)), y+h/2*(lynx(x,y)+lynx(u,w))
        Lt.append(t)
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return Lt,Lx,Ly
```

(b) Les courbes présentées en figure 2 montrent que pour la méthode d'Euler, l'énergie semble tendre vers $+\infty$ alors que pour la méthode de Heun, elle semble presque constante. La méthode de Heun est donc plus satisfaisante car elle respecte mieux la propriété de conservation de l'énergie.

6. (a) Les fonctions x et y étant supposées strictement positives, d'après le système (2), x' est du signe de $1-y$ et y' est du signe de $x-\alpha$. On peut distinguer 4 phases :

- lorsque $x > \alpha$, $y' > 0$ donc y croît,
- lorsque $y > 1$, $x' < 0$ et donc x décroît,
- lorsque $x < \alpha$, $y' < 0$ et don y décroît,
- lorsque $y < 1$, $x' > 0$ et donc x croît.

$\boxed{\text{La courbe en trait plein correspond à } x \text{ et celle en pointillé à } y.}$

(b) L'évolution des populations de lièvres et lynx semble périodique. Lorsque les lièvres sont assez nombreux, le nombre de lynx augmente ce qui entraine une augmentation de la consommation de proies c'est-à-dire une diminution du nombre de lièvres. Lorsque les lièvres ne sont plus assez nombreux, la population de lynx diminue et donc la pression exercée sur les lièvres, qui pourront à nouveau se reproduire.