pour jeudi 23 novembre

On note E l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère les quatre matrices de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Montrer que $\mathcal{B} = (I,J,K,L)$ est une base de E.
b. Donner la matrice de passage P de la base canonique de E à la base $\mathcal{B}$.

2. On pose $F_1 = \{M \in E \mid JMJ = M\}$ et $F_2 = \{M \in E \mid JMJ = -M\}$
a. Justifier que F_1 est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base et la dimension.
b. **i.** Montrer que F_2 est un sous-espace vectoriel de E.
ii. Montrer que (K,L) est une base de F_2.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Sous Python, on écrira M sous la forme de la liste de listes $[[a,b],[c,d]]$.
a. Écrire une fonction Python produit qui prend en arguments deux matrices carrées d'ordre 2 et renvoie leur produit.
b. Appliquer cette fonction à tous les couples (M,M') de $\{J,K,L\}^2$.

4. **a.** Montrer que F_1 est stable pour le produit matriciel c'est-à-dire que : $\forall (M,M') \in F_1^2,\ MM' \in F_1$.
b. Montrer que : $\forall (M,M') \in F_2^2,\ MM' \in F_1$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
a. Déterminer les coordonnées de A dans la base $\mathcal{B}$.
b. En déduire un couple (A_1,A_2) de $F_1 \times F_2$ tel que $A = A_1 + A_2$.

6. Soit M une matrice de E.
a. Justifier qu'il existe un couple $(M_1,M_2) \in F_1 \times F_2$, qu'on ne cherchera pas à calculer, tel que $M = M_1 + M_2$.
b. Montrer qu'un tel couple est unique.