Séries numériques

Ce qu'il faut connaître :
-la défintion d'une série et de la suite des sommes partielles
-la définiton de la convergence et de la somme d'une série
-la défition de la divergence d'une série
-la définition du reste d'ordre n d'une série numérique
-la définition de la convergence absolue d'une série
-le criètre de convergence par majoration de la suite des sommes partielles pour les séries à termes positifs
-les théorèmes de comparaison des séries numériques à termes réels positifs
-les séries télescopiques et le critère de convergence d'une série télescopique
-la série harmonique et sa nature
-la série harmonique alternée et sa nature
-la nature des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$
-la série géométrique $\sum q^n$ et sa nature selon la valeur de sa raison q
-les séries géométriques dérivées première et seconde $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$
-la somme d'une série géométrique dans le cas où elle converge
-la somme des séries géométriques dérivées première et seconde dans le cas où elles convergent
-la série exponentielle $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ et sa nature
-la somme d'une série exponentielle

1. **Comment montrer qu'une série numérique à termes réels positifs $\sum u_n$ est convergente**
   a. On reconnait que $\sum u_n$ est une combinaison linéaire de séries de référence convergente
   b. On montre que la suite des sommes partielles est convergente (par exemple en la majorant)
   c. On montre que $\forall n,\ u_n \leqslant v_n$ où $\sum v_n$ est une série de référence (ou qui s'en déduit) convergente
   d. On montre que $u_n \sim v_n$ où $\sum v_n$ est une série convergente et on majore u_n à l'aide de v_n

2. **Comment montrer qu'une série numérique à termes réels positifs $\sum u_n$ est divergente**
   Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$
   a. On montre que la suite (u_n) ne tend pas vers 0
   b. On montre que la suite des sommes partielles est divergente
   c. On montre que $\forall n,\ v_n \leqslant u_n$ où $\sum v_n$ est une série de référence (ou qui s'en déduit) divergente
   d. On montre que $u_n \sim v_n$ où $\sum v_n$ est une série divergente et on minore u_n à l'aide de v_n

3. **Comment étudier la nature d'une série numérique à termes non réels positifs $\sum u_n$**
   -On calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors $\sum u_n$ est divergente
   a. On reconnait que $\sum u_n$ est une combinaison linéaire de séries de référence
   b. On étudie la nature de la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ (cf **1**. et **2**.)
      Si $\sum |u_n|$ est convergente alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente
      Si $\sum |u_n|$ est divergente alors on n'utilise pas cette méthode
   c. On pose $\forall n,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on étudie la nature de la suite (S_n) des sommes partielles

4. **Comment calculer la somme d'une série numérique convergente** $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
   a. On se ramène à des combinaisons linéaires de sommes de séries de référence convergentes
      $\boxed{!}$ Il faut faire attention à l'indice à partir du quel commence la somme
   b. On pose $\forall n,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on calcule la limite de la suite (S_n) des sommes partielles