```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

I Interprétation géométrique d'une équation différentielle

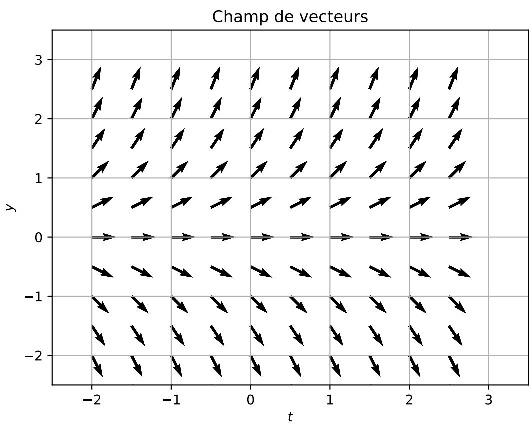
Considérons à titre d'exemple l'équation différentielle suivante avec condition initiale :

$$(E_0) \quad \begin{cases} y' & = & y \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

Afin de comprendre géométriquement ce que signifie cette équation différentielle, on l'étudie sans chercher à calculer exactement sa solution y_s.

[Q1.]

1. Quelle est la valeur de $y_s'(0)$ d'après (E_0) ?
2. Tracer alors sur un dessin la direction de la tangente à la courbe de la solution y_s au point $(0, y_S(0))$.
3. De façon générale, si f est une fonction vérifiant l'équation $y' = y$, et si à une date t donnée, la valeur de $f(t)$ est connue, quelle est la pente de la tangente à à la la courbe C_f au point $(t, f(t))$?
4. Que représente le dessin suivant (appelé champ des tangentes ou champ de vecteurs associé à l'équation) ?



[Q2.] Compléter la phrase suivante qui est une reformulation de résolution d'une équation différentielle avec condition initiale : : *Étant donné un champ de vecteurs associé à une équation différentielle, trouver une solution, c'est déterminer une ....dont les ....sont prescrites, partant d'un ....initial sur la ....*

II Équation différentielle scalaire d'ordre 1

II 1) Principe succintement rappelé

On fixe un intervalle $I = [a, b]$ et on se donne une équation différentielle (E) d'ordre 1 sur I avec condition initiale $y(a) = y_0$. La méthode d'Euler consiste, pour n un entier naturel non nul fixé, à calculer par récurrence et de façon approchée les valeurs y_k de la solution y de (E) aux points de I de la forme $t_k = a + kh$ pour $k = 0 \dots n$ où on a posé $h = \dfrac{b-a}{n}$. Ainsi :

$$(0) \quad \forall k \in \{0 \dots n\} \quad \text{on devrait avoir } y_k \simeq y(t_k) \quad \text{pour } h > 0 \quad \text{assez petit.}$$

En pratique, les valeurs approchées y_n se calculent par récurrence.

Précisément, on considère l'équation différentielle (E) sur un intervalle I avec condition initiale en $t_0 = a$:

$$(S) \quad \forall t \in I \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & F(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

[Q3.] En partant du taux d'accroissement à gauche d'une fonction, justifier l'approximation suivante :

$$y(t_{k+1}) \simeq y(t_k) \ + hF(t_k, y_k)$$

Dorénavant, on remplacera la résolution du système (S) par le calcul des premiers termes de la suite récurrente (y_n) définie par :

$$(S') \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_0 & & \text{donné} \\ y_{k+1} & = & y_k + hF(t_k, y_k) \end{array} \right.$$

Le système (S') s'appelle discrétisation de (S) par la méthode d'Euler à gauche.

[Q4.]

1. Remplir le tableau ci-dessous pour l'équation (E_0), pour $I = [0, 3]$, et $n = 6$:

$k =$	$t_k =$	$y_k =$	$F(t_k, y_k) =$	$y_s'(t_k) =$
1				
2				
3				
4				
5				
$6(= n)$				

2. En quoi consiste alors géométriquement la méthode d'Euler à gauche ?

3. Pouvez vous expliquer intuitivement en quoi le principe (0) semble raisonnable à partir de l'interprétation géométrique d'une équation différentielle ?

On notera que la solution y à (S) devient donc dans le schéma à une suite finie de valeurs approchées de cette dernière sur l'intervalle $[t_0, t_n]$.

Lycée Chateaubriand, Rennes
Classe de Biospé 2023-2024
MYP

[Q5.] Programmer une fonction `EulerG(F,y0,a,b,n)` qui prend en entrée une fonction F, une condition initiale y_0, les extrémités a, b d'un intervalle I, un entier $n > 0$ et qui renvoie en sortie les listes des points `[t0,..,tn]` (où $t_k = a + kh$) et `[y0,...,yn]` obtenues par discrétisation du système (S) en le système (S') (on rappelle que $h = \dfrac{b-a}{n}$).

II 2) Étude théorique d'un exemple historique

Soit $T > 0$. On revient à l'équation différentielle sur $I = [0, T]$ suivante :

$$(E_0) \quad \begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Remarque. Cette équation s'appelle aussi équation de Malthus.

[Q6.]

1. Donner la solution exacte y_e de (E_0).
2. Écrire le système (S') correspondant à l'équation (E_0).
3. Résoudre explicitement le système (S').

Pour vérifier le principe (0), à savoir que lorsque le pas de discrétisation h tend vers 0, la solution approchée devrait «converger» vers y_e, on procède de la manière suivante : on fixe un entier $N > 0$, et on pose $h = T/N$. D'après (0), $y_N \simeq y_e(t_N) = y_e(t)$, donc si $N \to \infty$, (c'est-à-dire $h \to 0$), on devrait avoir $y_N \to y_e(T)$.

[Q7.] Montrer que $y_N \to e^T$ quand $N \to \infty$. On cherchera pour cela, un équivalent de $v_N = \ln(1 + T/N)$ quand $N \to \infty$.

[Q8.]

1. Utiliser la fonction `EulerG` pour tracer sur un même graphique une solution approchée de (E_0) sur l'intervalle $I = [0, 3]$ avec un pas $n = 30$, ainsi que la courbe de la fonction y_L. Noter que graphiquement, la solution approchée est par définition une ligne brisée.
2. Répéter ce tracé pour des valeurs de n à chaque fois 10 fois plus grandes et constater.

II 3) Étude d'un second exemple

On considère l'équation différentielle logistique sur $I = \mathbf{R}_+$ suivante :

$$(L) \quad \begin{cases} y' &= y\left(1 - \dfrac{y}{10}\right) \\ y(0) &= 0.5 \end{cases}$$

On admet que cette équation différentielle admet une unique solution y_L sur $\mathbf{R}_+$.

[Q9.] Avec les notations du système (S), expliciter la fonction F pour ce système (L), ce dernier étant bien un cas particulier du système général (S).

[Q10.] Même question que [Q8.] pour (L) au lieu de (E_0), sachant que la solution exacte de (L) sur I est :

$$y_L : t \mapsto \frac{10}{1+19e^{-t}}$$

II 4) Un exemple d'équation non autonome

[Q11.] On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbf{R}_+$:

$$(G) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y' + 2ty & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

Écrire le schéma d'Euler pour cette équation différentielle est calculer une solution approchée sur l'intervalle $[0, T]$ ($T > 0$ donné) avec la fonction `EulerG`.

III Système d'équations scalaires

On peut réutiliser les idées de la méthode d'Euler pour les appliquer au cas de systèmes différentiels. Dans ce cas, il y a plusieurs fonctions inconnues.

III 1) Contexte

On considère les équations cinétiques suivantes d'ordre 1 mettant en jeu des substances A,B,C : Les équations cinétiques sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{dt}} & = & -k_1[\mathrm{A}] \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d[B]}}{\mathrm{dt}} & = & k_1[\mathrm{A}] - k_2[\mathrm{B}] \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d[C]}}{\mathrm{dt}} & = & k_2[\mathrm{B}] \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales suivantes à $t = 0$:

$$[\mathrm{A}]_0 = a > 0, \quad [\mathrm{B}]_0 = [\mathrm{C}]_0 = 0.$$

[Q12.] Écrire le schéma d'Euler à gauche pour ce système différentiel. On notera que cette fois, une solution du système différentiel est un triplet de trois fonctions $([\mathrm{A}], [\mathrm{B}], [\mathrm{C}])$.

[Q13.] Résoudre ces équations par la méthode d'Euler à gauche et représenter les concentrations [A], [B], [C] en fonction du temps sur l'intervalle de temps $[0, 6s]$ dans les cas suivants (les constantes de réaction sont en s^{-1}) :

1. $(k_1, k_2) = (1, 1)$.
2. $(k_1, k_2) = (10, 1)$.
3. $(k_1, k_2) = (1, 10)$.

On prendra $a = 1\text{mol.L}^{-1}$
On écrira par exemple une fonction `Euler2(a,k1,k2,n)` et on renverra en sortie les listes `Lt`,`La`, `Lb`,`Lc` déduites par le schéma d'Euler.

IV Oscillateur harmonique non amorti

IV 1) Présentation du modèle

On s'intéresse à un oscillateur harmonique (non amorti) régi par l'équation différentielle :

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x.$$

Pour étudier commodément cette équation différentielle, on introduit une seconde coordonnée : $y = \frac{1}{\omega}\frac{dx}{dt}$($y$ est proportionnelle à la vitesse). On peut traduire l'équation (1) sous la forme

$$(E) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega y \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega x \end{cases}$$

Le plan repéré par les coordonnées (x, y) s'appelle l'*espace des phases* associé à l'équation (1). Tout point de ce plan s'appelle un état du système.

Une solution du système (E) est un couple de fonctions (x, y) définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et telles que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega y(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega x(t) \end{cases}$$

Pour un état (u, v) de l'espace des phases, l'énergie est définie par $E(u, v) = u^2 + v^2$. Cela signifie que si à un instant donné, le système est dans l'état (u, v) (*i.e.* $x(t) = u$, et $y(t) = v$), son énergie à cet instant est égale à $E(u, v)$.

[Q14.] Soit $t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de (E). Par quelle propriété mathématique sur la fonction $t \mapsto E(x(t), y(t))$ se traduit la conservativité du système ?

IV 2) Schéma d'Euler explicite

[Q15.] Vérifier que la définition du taux d'accroissement à gauche conduit aux approximations suivantes pour (E) :

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &\approx x(t_n) + h\omega y(t_n) \\ y(t_{n+1}) &\approx y(t_n) - h\omega x(t_n) \end{aligned}$$

et qu'il est cohérent avec cette approximation de définir une suite de points de l'espace des phases $((x_n, y_n))_{n\geq 0}$ par :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & h\omega \\ -h\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette relation de récurrence s'appelle discrétation de (E) par schéma d'Euler explicite de pas h.

On notera dans la suite par commodité pour tout entier k :

$$X_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \qquad \text{si bien que} \qquad X_{n+1} = MX_n.$$

En outre on prendra une condition initiale de $(x(0), y(0)) = (a, 0)$, avec $a > 0$.

[Q16.] À quelle situation correspond ce choix de X_0 dans le modèle ?

Pour toutes les simulations numériques qui suivent, on pourra fixer $\omega = 2\pi$

[Q17.]
On fixe un instant final $T > 0$ et on examine les solutions sur $I = [0, T]]$.

1. Créer une fonction appelée `euler_exp` prenant en entrée `x0,y0`, un entier positif `N`, et qui renvoie les listes $[\mathtt{x\_0}, \dots, \mathtt{x\_N}]$, $[\mathtt{y\_0}, \dots, \mathtt{y\_N}]$ issues de l'application de la méthode d'Euler explicite à partir de (x_0, y_0) avec N itérations sur l'intervalle I.
2. Tester la fonction `euler_exp` pour des conditions initiales $(a, 0)$ de votre choix. On pourra pour cela tracer la famille de points $(\mathtt{x[k]}, \mathtt{y[k]})$, avec par exemple $\mathtt{N} = 100$ et faire varier N.

[Q18.]

1. Créer une fonction appelée `euler_exp2` prenant en entrée les mêmes arguments que la fonction `euler_exp` qui renvoie en sortie la liste des valeurs de l'énergie $E_\mathrm{k} = E((\mathtt{x[k]}, \mathtt{y[k]}))$ aux points $(\mathtt{x[k]}, \mathtt{y[k]})$ obtenus par `euler_exp` pour k allant de `0` à `N`.
2. Représenter graphiquement les valeurs de E_k en fonction de t_k obtenues par `euler_exp2` avec les données initiales que vous aviez choisies.
3. Montrer par un calcul que $E(x_{x+1}, y_{k+1}) = (1 + h^2\omega^2)^k E(x_0, y_0)$. Que penser du modèle vis-à-vis de la propriété de conservation de l'énergie du système ?

IV 3) Schéma d'Euler implicite

Lycée Chateaubriand, Rennes
Classe de Biospé 2023-2024
MYP

[Q19.] Vérifier que la définition du taux d'accroissement à droite conduit à la discrétisation par schéma d'Euler (dite implicite) suivante :

$$Q\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{où cette fois} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -h\omega \\ h\omega & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque. Dans ce dernier schéma, X_{n+1} ne se calcule pas explicitement à partir de X_n : la détermination de X_{n+1} passe par la résolution d'une équation. Ce qui explique le qualificatif *implicite* dans la méthode.

[Q20.] Créer une fonction appelée `euler_imp` prenant en entrée `x0, y0`, le pas `h` et un entier positif `N`, et qui renvoie les listes [`x_0`, … , `x_N`], [`y_0`, … , `y_N`] issues de l'application de la méthode d'Euler explicite à partir de (x_0, y_0) avec N itérations. Tester sa fonction avec un point initial de l'espace des phases de la forme $(a, 0)$. On pourra au préalable de la programmation calculer la matrice Q^{-1} pour produire un script semblable à celui de **[Q11.]**.

[Q21.] Créer une fonction appelée `euler_imp2` prenant en entrée `x0, y0`, le pas `h` et un entier positif `N`, et qui renvoie la des valeurs de l'énergie E sur les points de l'espace des phases $(\mathtt{x}_0, \mathtt{y}_0), \dots, (\mathtt{x}_\mathtt{N}, \mathtt{y}_\mathtt{N})$ obtenus par appel de la fonction `euler_imp`. Tester sa fonction avec un état initial (`x0`, `y0`) de l'espace des phases de la forme $(a, 0)$.

[Q22.] Montrer par un calcul que $E(x_{x+1}, y_{k+1}) = \dfrac{1}{(1+h^2\omega^2)^k} E(x_0, y_0)$. Que penser du modèle vis-à-vis de la propriété de conservation de l'énergie du système ?

IV 4) Schéma d'Euler trapézoïdal

[Q23.] Vérifier que la définition du taux d'accroissement centré conduit à la discrétisation suivante de l'équation (E)

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{h\omega}{2} \\ \dfrac{h\omega}{2} & 1 \end{pmatrix} X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{h\omega}{2} \\ -\dfrac{h\omega}{2} & 1 \end{pmatrix} X_n \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a > 0.$$

[Q24.] Refaire la même étude que pour le schéma d'Euler explicite et conclure sur cette discrétisation.

Lycée Chateaubriand, Rennes
Classe de Biospé 2023-2024
MYP