**Au programme**



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

# I Étude d'une suite implicite

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n$ défnie sur $I = \mathbf{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}},$$

et on considère pour $n \geq 3$ l'équation :

$$(E_n) \quad f_n(x) = 1.$$

**[Q1.]** Justifier que l'équation $(E_n)$ possède une unique solution dans $I$, notée $x_n$.

**[Q2.]** Tracer la courbe de la fonction $f_n$ pour les premières valeurs de $n$ afin de trouver un segment $[a, b]$ d'extrémités entières indépendantes de $n$ contenant $x_n$ pour $n \geq 2$.

**[Q3.]**

1. Écrire une fonction `xn(n,eps)` qui prend en entrée un entier $n$, un flottant eps et qui renvoie en sortie une valeur approchée de $x_n$ à eps près obtenue par dichotomie sur l'intervalle $[a, b]$ déterminé à la question précédente.
2. Donner la liste des 15 premiers termes de la suite $(x_n)$ à $10^{-5}$ près. Conjecturer la montonie et la nature de la suite $(x_n)$.

# II Étude d'une suite récurrente

## II 1) Fonctions de base

La suite logistique (vue en cours dans le chapitre de dynamique des populations) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} = \mu u_n(1-u_n) \end{cases} \tag{1}$$

où $\mu$ est un paramètre dans $[0,4]$.

Le modèle logistique est une correction du modèle malthusien (par le facteur $1-u_n$). Pour autant, le comportement de la suite ainsi définie est très variable suivant les valeurs de $\mu$ et $u_0$, et peut se montrer extrêmement compliqué.

**[Q4.]** Programmer la fonction $f_\mu$ associée à cette suite récurrente.

**[Q5.]** Tracer sur l'intervalle $[0,1]$ la courbe de la fonction $f_{0.75}$ par exemple. On pourra commencer par créer la liste X contenant 100 points régulièrement répartis de 0 à 1, puis la liste Y des images par $f_{0.75}$ en compréhension.

**[Q6.]** Écrire une fonction `listeValeurs(mu,u0,n)` prenant en entrée deux flottants `mu`, `u0`, ainsi qu'un entier n et retournant en sortie la liste L des valeurs $u_0, \ldots u_n$ des termes de la suite définie par (1). Testez votre fonction pour $\mu = 0,5$, $u_0 = 0,3$, $n = 5$.

## II 2) Représentation graphique

Une façon classique de représenter graphiquement les termes de la suite est de considérer cette dernière comme une fonction définie sur $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$.

**[Q7.]** Tracer graphiquement la famille de points $\Big((n, u_n)\Big)_{0 \le n \le 20}$ afin d'observer le comportement de la suite. On pourra essayer par exemple les valeurs de $\mu$ et $u_0$ données dans le tableau ci-dessous et conjecturer la monotonie et nature de la suite :

| $\mu$ | $u_0$ |
|---|---|
| 0,81 | 0,1 |
| | 0,83 |
| 1,93 | 0,02 |
| | 0,75 |
| 2,75 | 0,43 |
| 2,81 | 0,46 |
| 3,45 | 0,23 |
| 3,67 | 0,23 |

**[Q8.]**

1. Écrire une fonction qui prend en entrée une liste `L` et qui renvoie en sortie le tuple `Lp,Li` des sous-listes des termes de `L` d'indices respectivement pairs et impairs. Penser à un slicing sur les listes
2. Tracer pour les deux derniers sets de valeurs $(\mu, u_0)$ les sous-suites des termes de rang pair et impair des suites $(u_n)$ correspondantes.

## II 3) Obtention du diagramme de bifurcation

**[Q9.]** L'instruction `round(a,n)` arrondit un flottant `a` à `n` décimales. Écrire une fonction `asymptotique(mu,u0)` qui prend en entrée les flottants `mu` et `u0` et renvoie en sortie la liste des termes $u_{501}, \ldots, u_{600}$ arrondis à trois décimales. On pensera à utiliser la fonction `listeValeurs` et réaliser une extraction de sous-liste par *slicing*.

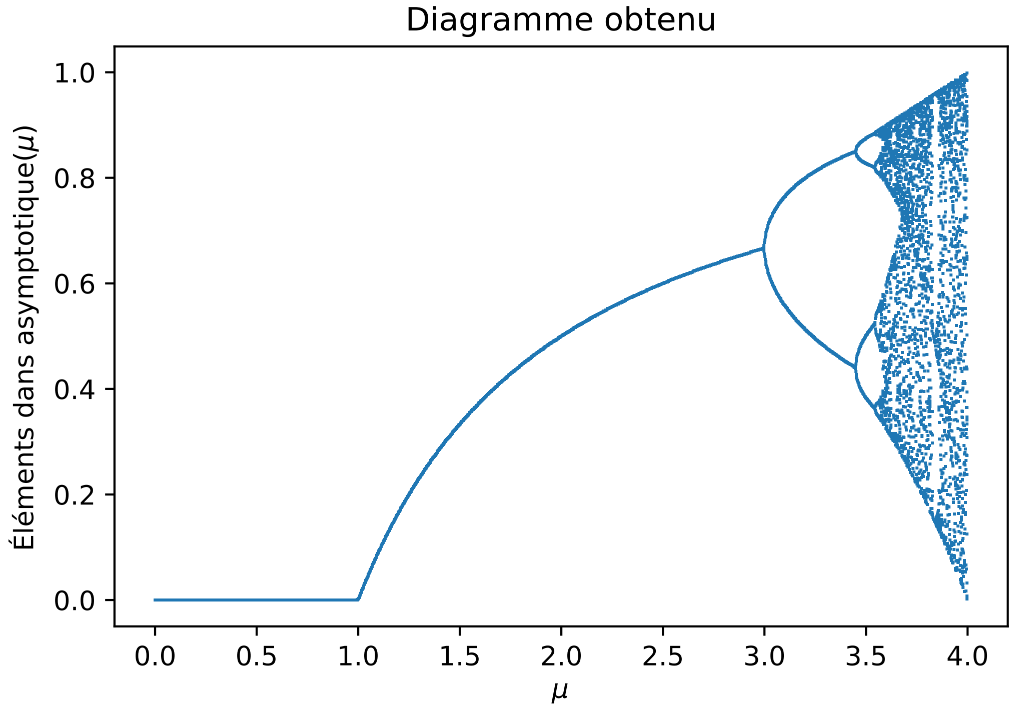
**[Q10.]** Appliquer cette dernière fonction pour $u_0 = 0,75$ et les valeurs $\mu \in \{1.1, 2.1, 3.1, 3.5\}$, mais n'afficher que les 8 dernières valeurs de chaque liste obtenue. Que remarque-t-on ?

**[Q11.]** Écrire une fonction `def image(liste):` qui prend en entrée une liste de flottants et retourne en sortie la liste `V` des valeurs distinctes de la liste. Par exemple, si `liste = [1,2,3,1,2,3,1,1,1]`, la fonction devrait renvoyer la valeur `[1,2,3]`.

**[Q12.]** On aimerait, pour $u_0$ fixé, savoir combien de valeurs distinctes se trouvent dans la liste `asymptotique(mu,u0)` en fonction de $\mu$.
On fixe ici $u_0 = 0,75$. Répondre à cette question en traçant graphiquement la fonction qui à $\mu$ associe ce nombre. On pourra faire varier $\mu$ de 0 à 4 par pas de $1/100$ par exemple. On tracera le nuage de points en spécifiant dans la commande `plot` l'option : `","`

**[Q13.]** Dans cette question, on prend encore $u_0 = 0.75$. Tracer un graphique sur lequel figurent en abscisses les valeurs de $\mu \in [0, 4]$ et en ordonnées les valeurs se trouvant dans les différentes listes `image(asymptotique(mu,0.75))` (ainsi par exemple, si la liste `image(asymptotique(mu,0.75))` contient trois éléments, sur le diagramme, on dessinera 3 points à l'abscisse `mu`). On fera varier $\mu$ par pas de `0.002`.

Vous devriez obtenir un diagramme de ce genre :




■ **Remarque 1.** Le diagramme obtenu s'appelle *diagramme de bifurcations* de la suite logistique.