Semaine 8
du lundi 20 au vendredi 24 novembre 2023

Polynômes

Monômes, degré, Coefficients, Polynômes à coefficients réels ou complexes
Opérations sur les polynômes (somme, produit)
Degré d'une somme, d'un produit
Une combinaison linéaire de monômes de degrés distincts ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls
Polynôme dérivé, degré du polynôme dérivé
Racines d'un polynôme
Un polynôme P est factorisable par $X-a$ si, et seulement si, a est une racine de P
Généralisation à plusieurs racines distinctes
Ordre de multiplicité d'une racine
Théorème de d'Alembert-Gauss :
• Tout polynôme à coefficients complexes de degré n peut s'écrire $a_n(X-x_1)\cdots(X-x_n),$ les x_i n'étant pas nécessairement deux à deux distincts
• Tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité
Un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant au moins $n+1$ racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, est nul

Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel ($\mathbb{K}^n$,$\mathbb{K}^I$ ou $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ où I est un intervalle, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs
Sous-espaces vectoriels
Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Notation Vect$(x_1,x_2,,x_k)$
Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence)
Famille libre finie. Famille liée finie
Exemple fondamental de famille libre : toute famille finie de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre
Base finie d'un sous-espace vectoriel (sous réserve d'existence)
Coordonnées d'un vecteur dans une base
Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base
Base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$
De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base
Toutes les bases de E ont le même cardinal
Dimension d'un espace vectoriel E
Dans un espace vectoriel de dimension n :
toute famille libre a au plus n éléments
toute famille libre ayant n élements est une base
toute famille génératrice a au moins n éléments
une famille génératrice ayant n éléments est une base
Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie alors :
F est de dimension finie
$\dim F \leqslant \dim E$
$F = E \Leftrightarrow \dim F = \dim E$
Rang d'une famille finie de vecteurs

Questions de cours

Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?
Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme ?
Somme et produit des racines d'un trinôme du second dégré

Définition d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E
Définition d'une base et de la dimension d'un espace vectoriel.
Définition du rang d'un système de vecteurs d'un espace vectoriel.
Définition d'une famille libre $(u_1,u_2,\cdots,u_k)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E.

Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.
Caractérisation à l'aide du rang d'une famille libre d'une famille de p vecteurs de E de dimension n.
Caractérisation à l'aide du rang d'une famille génératrice d'une famille de p vecteurs de E de dimension n.
Caractérisation à l'aide du rang d'une base d'une famille de p vecteurs de E de dimension n.
Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n.

On appelle P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

Si x est un vecteur de E, quelle relation lie $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(x)$?