TD 6 : Espaces vectoriels - Systèmes linéaires

1 Exercices d'application directe du cours

$\boxed{1}$ Quels sont les espaces vectoriels parmi les ensembles suivants ?

1. E_1 : ensemble des solutions de l'équation différentielle $x\,y'' + (x^2+1)\,y' + 3\,y = 0$
2. E_2 : ensemble des solutions de l'équation différentielle $(x^2-1)\,y' - 2x\,y = x\,e^x$
3. $E_3 = \{P \in \mathbf{R}[X] \quad P(1) = 0\}$.

$\boxed{2}$ Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} -2x - y + 5z = 1 \\ x - 2y - t = 2 \\ -x + y + z + u = 1 \end{cases}$
2. Soit $m \in \mathbf{R}$ un paramètre fixé :
$\begin{cases} mx - y + mz = 1 \\ x - y + z + t = m \\ x + (m-2)y + mz + t = 1 \end{cases}$

$\boxed{3}$ Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ?

1. $u = (-1, 3, 2)$, $v = (1, -1, -3)$.
2. $u = (-1, 0, 1)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (-1, 1, 0)$.
3. $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = (1, -1, 1)$.
4. $u = (1, -1, -1)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (3, -1, 1)$, et $x = (2, -1, 1)$.

$\boxed{4}$ Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ \begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ x + 2t = 0 \end{cases}\right\} \\ F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ 3x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 3x - 2y = z = -x + y\} \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Soit les vecteurs $u_1 = (2, 1, -1)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (3, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
Quelles sont les coordonnées de $(2, -1, 1)$ et $(1, 2, -1)$ dans $\mathscr{B}$?

$\boxed{6}$ Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (0, 3, -2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (3, -3, 1)$. On note :

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) \qquad \text{et} \qquad D = \{(a, a, a) \quad a \in \mathbb{R}\}.$$

1. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
2. Déterminer une base et une équation cartésienne de E.
3. Montrer que la juxtaposition d'une base de E et d'une base de D forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{7}$ Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$\begin{array}{ll} u = (1, 0, 0, 1), & v = (2, 1, -1, 0) \\ w = (3, 1, -1, 1), & x = (5, 2, -2, 1) \end{array}$$

Montrer que Vect $(u, v) =$ Vect (w, x).

$\boxed{8}$ Montrer que l'ensemble E des solutions de l'équation différentielle $y'' - 4\,y = 0$ est un espace vectoriel. En donner une base et la dimension.

$\boxed{9}$ Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$

1. Montrer que la famille constituée des polynômes $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 - 1 + X + X^2$ et $P_3 = 1 - X + X^2$ est une base de E.
2. Étant donné $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, quelles sont les coordonnées de $P(X) = a + bX + cX^2$ relativement à cette base ?

$\boxed{10}$ On considère l'ensemble E des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 2a+b & 3b-5c & a \\ -b & a+b-c & a-2c \\ c & b+c & 2b-c \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.

$\boxed{11}$ Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ on considère les matrices A, B, C, D suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Montrer que la famille (A, B, C, D) est une base de E et donner les coordonnées d'une matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ quelconque dans cette base.

2 Exercices classiques

$\boxed{12}$ On considère l'ensemble E suivant :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ P(0) = P'(0) = P(1) = 0\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et préciser sa dimension.
3. Montrer que la juxtaposition de la base de E trouvée précédemment et de la famille $\mathscr{F} = (1 + X, 1 - X^2, 1 + X$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.